Comprensión del Concepto de Número Decimal en El Marco de la Teoría APOE

José Fernando García Baena

Universidad Tecnológica de Pereira

Nota del Autor

José Fernando García Baena, Programa de Maestría En Enseñanza de las Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira

El estudio fue subvencionado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN)

La correspondencia en relación con esta investigación debe dirigirse a José Fernando García Baena, Programa de Maestría En Enseñanza de las Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Calle 33 # 10-91, Email: josefernandogarciabaena@gmail.com

Comprensión del Concepto de Número Decimal de los Estudiantes de Grado Sexto de Educación Básica de la Institución Educativa Héctor Ángel Arcila en El Marco de la Teoría APOE

José Fernando García Baena

Asesor: Eliecer Aldana Bermúdez

Doctor en Educación Matemática

Universidad Tecnológica de Pereira

Marzo de 2018

Nota del Autor

José Fernando García Baena, Programa de Maestría En Enseñanza de las Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira

El estudio fue subvencionado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN)

La correspondencia en relación con esta investigación debe dirigirse a José Fernando García Baena, Programa de Maestría En Enseñanza de las Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Calle 33 # 10-91, Email: josefernandogarciabaena@gmail.com

Agradecimientos

Gracias Dios por el don de la vida, por la motivación, creatividad e inteligencia manifiestas en esta investigación. Gracias por sentir hambre y darme el pan de cada día, por tener sed y siempre poder encontrar manantiales de agua viva para saciarla, por los legados de humildad, honestidad, responsabilidad, respeto, lealtad y caridad transmitidos a través de mis padres pareja y amigos. Gracias por las enseñanzas recibidas a través de las escuelas, maestros, también a través de la vida misma y por poder brindarlas. Gracias por la tierra, el agua el aire y el sol; por la fe, la esperanza, la alegría, la nobleza y la templanza. Gracias por poner en mí un ser con la humanidad en busca de lo bueno, lo bello, lo justo y lo verdadero.

Quiero agradecer a mis padres Gladys de Jesús Baena Gutiérrez y Fabian de la Cruz García Arango por el apoyo recibido durante la vida y durante el estudio de esta maestría, quienes me han regalado tiempo y un ambiente óptimo durante su desarrollo.

Agradezco al Doctor Eliecer Aldana Bermudez, quien como asesor ha motivado e inspirado la realización del proyecto de la comprensión de los números decimales en el marco de la Teoría APOE.

También quiero agradecer a Luz Patricia Rodriguez por ser excelente compañera a lo largo del estudio de la maestría.

Aforismo

"Para nada digna prueba puede ser probada

ni refutada aún: por lo cual sé sabio.

Escindir debemos siempre para el lado

más soleado de la duda".

(Alfred Lord Tennyson, 1809-1892, The Ancient Sage)

Índice

Contenido **Pag.**

Índice de Figuras

Contenidos **Pag.**

Índice de Tablas

Contenidos **Pag.**

Capítulo 1: Identificación del problema

1.1. Introducción

El estudio se realizó en un colegio oficial en un sector rural de la ciudad de Pereira, por tal motivo describimos las características propias de las leyes que rigen la educación pública en Colombia, damos una mirada al lugar que ocupa el número decimal en los lineamientos y estándares colombianos, se hace una descripción de los lineamientos y estándares que proponen países como Estados Unidos, Canadá, Francia y España (Ver anexo A en CD), mediante los cuales el lector puede establecer diferencias y puntos en común entre los diferentes enfoques que proponen en estos países como pauta para la enseñanza de los números decimales. También se indagó sobre la evolución del concepto de número decimal a través de la historia.

Para entrar en materia se realiza el ciclo de investigación planteado por la teoría APOE, iniciando con el análisis de textos que contienen el concepto de número decimal para grado sexto y se complementa con el estudio de textos especializados de investigadores para realizar una descomposición genética, de manera que se evidencie lo planteado por Trigueros (2005) para que "pueda ser un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto a lo largo del proceso" para la comprensión del concepto de número decimal. Basado en esta descomposición genética se logra construir una secuencia didáctica para la implementación de las enseñanzas aplicando una secuencia didáctica propia de la teoría APOE. Durante este proceso las clases fueron grabadas para revisar la manera como se entregan los conceptos y para poder medir los niveles de comprensión se construye y valida una prueba escrita y se realizan entrevistas audiograbadas para hacer el análisis. Una vez se tienen los instrumentos, se aplican y analizan para determinar las acciones, procesos, objetos y esquemas que logran construir los estudiantes, para realizar las caracterizaciones y determinar los niveles de comprensión inter, intra y trans del concepto de número decimal.

1.2. Sobre la historia de los números decimales

Hay concepciones muy difíciles de esclarecer en torno a los números decimales desde su contexto histórico, empezando por su origen, y revisar cuáles fueron las primeras situaciones en la historia que requirieron que este concepto matemático tuviera un buen desarrollo, observar la relación matemática del número decimal con otros sistemas de numeración, entender la diferencia entre número decimal y numeración decimal (lo que genera la distinción entre número y expresión decimal de un número), así como realizar un estudio de carácter epistemológico. Éstos son aspectos fundamentales y aunque no los podemos analizar a profundidad, sí tomamos como referencia algunos estudios realizados en estos aspectos. En este apartado se describirán algunos datos importantes que describen su evolución a través de la historia (Ver Anexo B en CD).

No es posible realizar operaciones mentales que permitan la comprensión del concepto de número decimal sin avanzar en la comprensión de los números reales, “pues un número decimal es un número real y no puede comprenderse el número decimal si no se comprende el número real”, (Centeno 1988). En la segunda mitad del siglo XIX, varios matemáticos se ocuparon de la construcción de lo que hoy llamamos conjunto de los números reales; entre aportes y logros contundentes se destacan: Cauchy (1821), Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1854-1918), Charles Méray (1835-1911), Heinrich Heine (1821-1881), Hilbert (1862-1943).

Gracias a sus aportes es posible la formalización y construcción de los números reales y desarrollar el pensamiento matemático con la densidad que el concepto de número real lo requiere, "hay en la recta una infinidad de puntos que no corresponden a ningún número racional [...] hay longitudes que son inconmensurables con una unidad de longitud dada, por ejemplo, la diagonal del cuadrado cuyo lado es la unidad [...] la recta es infinitamente más rica en puntos que el dominio R de los racionales en números [...] para ver en forma aritmética todos los fenómenos de la recta, vemos que resultan insuficientes los números racionales y que, por esto, será indispensable mejorar el instrumento R por medio de la creación de números nuevos tales que el campo de los números adquiridos alcance la misma completitud, o bien, como preferimos expresarlo, la misma continuidad que la línea recta." (Dedekind, op. cit., 8,9) tomado de (Aguilon Diego 2013).

"Se puede suponer que durante cinco siglos los decimales están potencialmente presentes en la cultura y su estatus está en evolución", (Brousseau 1981).

1.3. Identificación del problema:

Para un docente de matemáticas, o para cualquier persona que pretenda dar explicación a un interrogante en el campo de los números decimales, se presenta la necesidad de tener claridad para dar un manejo adecuado de dicho concepto. Son muchos los interrogantes que se generan desde las aulas de clase y en las situaciones de la vida cotidiana que requieren del manejo de cifras decimales, sus formas de representación, comparación de valores y valor posicional entre otros que podrían llegar a ser motivo de análisis y reflexión.

Estas formas de pensamiento están ligadas a un ecosistema, es decir, a un contexto, que por ejemplo en países como Argentina donde comúnmente se usa el centavo en el uso cotidiano de su moneda, los estudiantes se adaptan a un pensamiento de las cantidades que requieren el uso del concepto de número decimal y su representación en sus diferentes formas (Relime Vol.6, marzo 2003, pp. 5-26); a estos niños se les puede presentar el número decimal desde el comercio de productos. En Colombia no usamos el centavo, por lo tanto, los docentes debemos buscar una manera más adecuada para contextualizar el concepto desde su utilidad y aplicabilidad, sin embargo, de manera independiente al contexto en el que se realizan los procesos de enseñanza, se puede aspirar a lograr un análisis de los procesos de comprensión que realizan los estudiantes para construir del concepto de número decimal. Es aquí donde la teoría APOE es muy pertinente ya que permite hacer un estudio de estas formas de pensamiento para el estudio de la conformación de esquemas mentales que permiten la apropiación de objetos matemáticos.

Hay que tener en cuenta que la apropiación del concepto de número decimal es un proceso que toma tiempo, en su obra Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Centeno (1988) propone: “el tiempo necesario para realizar este camino que va del primer contacto con los números decimales hasta el dominio de estos, puede extenderse desde los ocho o nueve años hasta los trece o catorce, sin que se pueda asegurar que a esta edad están resueltas todas las dificultades que este aprendizaje plantea" como resultado de numerosos estudios realizados, de los cuales la misma autora toma como referencia.

Es compleja la labor de difundir y homologar los criterios de las competencias básicas en matemáticas, ya que el pensamiento matemático adopta diversas formas de una persona a otra y no está exento de concepciones erróneas, entendiendo "concepción" en el sentido de la palabra definido por Artigue (1984), quien la justifica de manera que establece una diferencia entre el objeto matemático que es único y los diversos significados que los estudiantes puedan conjeturar de dicho objeto matemático, si son concepciones antiguas pueden ser *cogniciones petrificadas*, Luis Puig (2006), tomado de Gómez (2010). Para el caso de los números decimales no hay una excepción, existen diversas concepciones ya estudiadas por Brousseau (1983, 1998), que desde la propuesta formulada por Stevin en 1585, han propiciado diferentes formas de percibirlos y comprenderlos.

1.4. Formulación del problema.

Para el hombre de hoy día ha sido de gran utilidad tener en su kit de herramientas a los números decimales, la historia ha visto evolucionar este objeto de conocimiento y sus diferentes formas de uso han sido heredadas de una generación a otra, de una cultura a otra, de una sociedad a otra, todo esto en la medida que pueda ser transmitido de una persona a otra; de tal manera que muchas de sus características y propiedades se hacen más comprensibles y no solamente útiles sino necesarias en diversos contextos en los que pueda ser aplicado. El número decimal encuentra utilidad en el ámbito de las medidas y sus conversiones, el intercambio comercial de la moneda, útiles en contextos de proporcionalidad como los porcentajes, cálculo de costos, en la interpretación de datos estadísticos, en diversas ramas y campos del saber cómo la física, la química, educación física, las ciencias naturales; es sin duda alguna, una herramienta útil para obtener nuevos conocimientos y sus aplicaciones aumentan a medida que se logran nuevos descubrimientos.

Los números decimales son una base para la comprensión del sistema métrico decimal, los números irracionales y en aplicaciones del cálculo entre muchas otros conceptos; su propia naturaleza encierra la comprensión del número racional, sus propiedades y características, la noción de cantidad, exactitud, densidad, infinito, entre otras; en consecuencia, los números decimales se abren paso por el currículo de estudios desde la básica primaria y continúa siendo herramienta de trabajo para el desarrollo de los actos educativos al interior del aula en todos los niveles de estudio. El uso de este objeto matemático se hace necesario en situaciones que se presentan tanto dentro como fuera del aula, incluso se puede decir a ciencia cierta que el proceso de enseñanza- aprendizaje se da en lugares donde no sea necesariamente un profesor de matemáticas es quien se encuentra desempeñando la función de maestro.

En educación primaria, básica y media, los números decimales comienzan a ser objeto de estudio. Por lo general se empieza a abordar el concepto de número decimal desde el grado tercero y según lo propuesto en los estándares, es aquí donde se empiezan a cimentar las bases para ser abordados de manera más formal en los grados siguientes y su proceso de comprensión continúa desarrollándose desde grado sexto hasta grado décimo y undécimo con el tratamiento de números irracionales. "…Los decimales son un subconjunto de los racionales cuya utilidad en el mundo del intercambio comercial y del trabajo es indiscutible. Se ha llegado a afirmar (cf. Centeno; 1997; 17) que estos números se han convertido en los últimos años en protagonistas de todos los cálculos…”, de esta manera Ávila (2008) abre campo al problema relacionado con el poco énfasis que se le da a la enseñanza de los números decimales, investiga con docentes de grado quinto y sexto grado de educación en México y apoya sus argumentos sobre Neyret (1995) quien afirma: **los decimales no ocupan un espacio privilegiado ni en la enseñanza ni en las preocupaciones docentes. Predomina la idea de que las fracciones ameritan más tiempo de enseñanza para hacerlas comprensibles: los decimales, habiéndose comprendido el valor posicional, *son pan comido...***

Es la primera vez que se hace una investigación en la comprensión APOE del número decimal y sus niveles en el marco de esta teoría neopiagetiana y sería la primera vez que se hace una descomposición genética de este objeto matemático, este hecho ofrece un aporte al ámbito del pensamiento matemático avanzado y a futuros estudios que continúen en este objeto de conocimiento, tanto en el marco teórico, del objeto de estudio y como base para la comprensión de los fenómenos que se deben tener en cuenta para avanzar en el campo de la enseñanza de un concepto. Cabe resaltar que un concepto matemático tan amplio como lo es el concepto de número decimal recibe el carácter de objeto de conocimiento cuando es “encapsulado” Dubinsky (1996). Así podemos prever las dificultades que nos plantea la enseñanza y aprendizaje de estos números en la escuela, que según Konic (2011), ya han sido objeto de estudio por (Brosseau, Brosseau y Warfield, 2004; Nowlin, 2007; Stacey, 2001; Zazquis, 1993; Steinle, 2004; Gagatsis, Elía y Panaoura, 2010), entre otros. Trabajos como este en Colombia son necesarios para reconocer un fenómeno global del pensamiento matemático desde nuestro contexto y ampliar la producción de investigaciones en este campo.

1.5. Pregunta de investigación

Indagar en este campo es una necesidad individual y colectiva, personal y social, pues marca pautas para el desarrollo del conocimiento de la humanidad en un camino que va desde lo simple hacia lo complejo; hace parte de un ciclo que nunca termina, es un micro universo infinito el número decimal y el pensamiento del hombre que navega a través de dicho conocimiento se complementa con otros campos de la matemática que permiten identificar lo calculable y lo incalculable, lo limitado y lo ilimitado, lo finito y lo infinito, es una expresión creada como herramienta útil y necesaria para el desarrollo del conocimiento en diversos campos y su uso es prácticamente global.

Realizar un estudio de la comprensión del objeto matemático: **los números decimales**, es una labor necesaria para desarrollar estrategias didácticas que sirvan como herramienta para la enseñanza de las matemáticas, pues desde la comprensión de las estructuras de pensamiento de la persona que aprende se pueden generar acciones más apropiadas por parte de la persona que enseña, según Dreyfus (1991) "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales" tomado de (Aldana, 2011, p 20).

Este tipo de conclusiones son el resultado de observaciones detalladas con base en investigaciones realizadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de los números decimales, en este campo ya varios países como Argentina, México, Francia, España, Estados Unidos, tienen un terreno adelantado en el análisis del proceso de la comprensión de este objeto matemático y lo plasman en sus lineamientos educativos, es difundido en artículos de revista, periódicos, libros y cartillas que fueron consultados y citados a lo largo de esta investigación, y Colombia no puede ser la excepción, ya que su población presenta las mismas necesidades de comprensión del conocimiento matemático como camino para el desarrollo de la sociedad y avance en su sistema de educación. Todo proceso de investigación realizado a nivel local permite un acercamiento a la realidad del entorno; por tal motivo en este trabajo de Maestría se presenta un estudio en este campo.

Interrogante planteado: ¿Cuáles son los niveles de desarrollo de la comprensión del concepto de número decimal de los estudiantes de educación básica desde el marco de la teoría APOE?

1.6. Objetivos de la investigación:

1.6.1. Objetivo General:

Evidenciar los niveles de comprensión que tienen los estudiantes de grado sexto de educación básica del concepto de número decimal en el marco de la teoría APOE.

1.6.2. Objetivos Específicos:

- Analizar textos que contengan el concepto de número decimal para grado sexto.
- Realizar una descomposición genética del concepto de número decimal.
- Construir una secuencia didáctica para la implementación de las enseñanzas.
- Construir y validar instrumentos de análisis como pruebas y entrevistas.
- Determinar los niveles de comprensión del concepto de número decimal.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1. El aprendizaje de las matemáticas

La investigación cognitiva que enfoca su interés en el aprendizaje de las matemáticas ha generado diferentes maneras de relacionar el paso desde un conjunto de *acciones* que se relacionan entre sí como base para que se generen los *conceptos*; de esta manera los investigadores dan nombre a este fenómeno: *interiorización* (Piaget & Beth, 1980), *reificación* (Sfard, 1990), *encapsulación* (Dubinsky, 1991), y *objetivación* (Dörfler, 1991). Tomado de (García 1998)

Para Piaget los constructos *equilibración, asimilación, acomodación y abstracción reflexiva* son la base para construir entes abstractos a partir de un conjunto de acciones. Ed Dubinsky (1991a, 1991b), Parte de este análisis realizado por Piaget para proponer un orden en la comprensión de objetos matemáticos en los que las acciones forman procesos y estos procesos se encapsulan en objetos.

Sfard (1991) llama reificación al "acto de creación de entidades abstractas adecuadas." Y manifiesta el acto de reificación como la transformación de una forma procedimental de ver un tema en matemáticas a otra forma que ella llama estructural.

El marco teórico aquí presentado toma como base la teoría APOE basado en estudios realizados por Dubinsky y Lewin (1986) y Dubinsky (1991a, 1991b), la cual, siendo una teoría neopiagetiana toma como base a Piaget (Piaget, 1987 y 1990; Piaget y García, 1982; Beth y Piaget, 1980) quien propone una manera en la que se desarrollan los conceptos por medio de una operación mental llamada *abstracción reflexiva*, y las ideas desarrolladas por Dörfler (1987 y 1991), quien amplía y complementa la comprensión de la esquematización de los objetos que han sido encapsulados.

2.2. Teoría Piagetiana

Piaget (1987) plantea que la mente humana opera en términos de dos funciones "*invariantes*" denominadas: *organización y adaptación*, los organismos humanos organizan sus procesos psicológicos en sistemas coherentes que se adaptan a los estímulos del entorno. Esta adaptación, a su vez opera en los sistemas psicológicos y fisiológicos mediante la *asimilación* y la *acomodación.*

Cuando un organismo se enfrenta a un estímulo del entorno presenta *asimilación* según el modo en el que se enfrenta a un estímulo, mientras que presenta *acomodación* cuando reorganiza las estructuras mentales para adaptarse al medio. A este proceso Piaget (1987) le dio el nombre de restructuración cognitiva.

Estos dos procesos que son invariantes a través del desarrollo cognitivo interactúan mutuamente en un proceso de *equilibración*. El equilibrio puede considerarse cómo un proceso regulador, a un nivel más alto, que gobierna la relación entre la asimilación y la acomodación (Piaget, 1987; García, 1997).

2.3. Abstracción reflexiva

Según Beth y Piaget (1980) la abstracción reflexiva es una herramienta que permite la construcción de conocimiento, que consiste básicamente en la reorganización de estructuras mentales y la asimilación de conocimiento nuevo, adaptado a una información que ha sido adquirida de un objeto (mental) sobre el cual se ejecutan acciones (mentales).

Muntaner (2009) menciona a Inhelder, Sinclair y Bovet (1975) haciendo una referencia la relación sujeto-objeto, diferenciando la abstracción empírica de la abstracción reflexiva como medios por los cuales surge el conocimiento de la siguiente manera: *"Abstracción reflexiva saca sus informaciones de la coordinación de las acciones que el sujeto ejerce sobre los objetos. Ni las acciones, ni la coordinación tienen su origen en el objeto, que representa solamente el papel de soporte".* (p.254)

Muntaner (2009) nos aclara que el conocimiento "exige una actuación por parte del sujeto que provoque las acomodaciones necesarias para asimilar las nuevas experiencias y ello se produce gracias al conocimiento lógico-matemático" (p.254). Según Dubinsky (1991) "el concepto de abstracción reflexiva puede ser una poderosa herramienta en el estudio del pensamiento matemático avanzado" (p. 1).

2.4 Acciones, procesos, objetos y esquemas (APOE)

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría neopiagetiana desarrollada por por Dubinsky que tiene su origen sobre las bases de la teoría constructivista y de manera más específica sobre el proceso de abstracción reflexiva propuesto por Piaget para describir la construcción de conocimiento y el pensamiento lógico de los niños.

La teoría APOE hace referencia a una interiorización sobre las acciones y procesos que se realizan sobre un objeto de conocimiento y se caracteriza por "su tendencia para responder a problemas o situaciones matemáticas por reflexión sobre problemas y su solución en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos, y organizando éstos en esquemas para usarlos en el tratamiento de las situaciones..." (Asiala et al., 1996, p. 6).

Una acción se describe como los pasos a seguir para lograr una transformación sobre un objeto. “Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento” (Dubinsky, 1996, p. 34). Cuando el sujeto repite una acción o un conjunto de acciones y reflexiona sobre ellas, estas pueden interiorizarse en un **proceso**. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso revertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). En general los procesos no necesariamente se logran a partir de la interiorización de acciones, además pueden producirse por la coordinación de dos o más procesos (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Cuando un individuo realiza transformaciones teniendo en cuenta las operaciones realizadas sobre un proceso como un todo, reflexiona sobre estas transformaciones y las construye, entonces el proceso ha sido encapsulado en **objeto**. (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996).

La *interiorización* es un proceso mediante el cual un individuo realiza una construcción mental en respuesta a un fenómeno, que puede ser una acción interna, una percepción o una experiencia resultante de una actividad cognitiva. Cuando un individuo puede controlar una acción conscientemente, entonces la acción es interiorizada y la acción se transforma en proceso. (Didacticoliliana, 2010) comentario de un blog. Recuperado de http://didacticoliliana.blogspot.com.co/2010/10/abstraccion.html

Un **esquema** es una colección de acciones, procesos y objetos, que a su vez se pueden organizar con otros esquemas. El esquema, "es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala et al, 1996, p. 12). Un esquema se dice que es tematizado cuando ha sido tratado como un objeto.

En conclusión, para que un individuo llegue a la comprensión de un concepto matemático, debe interactuar mediante *acciones* con un objeto previamente construido, ya sea mental o físico, con la repetición dichas acciones son interiorizadas en *procesos*, y estos a su vez son encapsulados, coordinados y revertidos para formar *objetos*, estos pueden ser desencapsulados hacia las acciones y procesos ya interiorizados e incluso organizados con otros objetos en *esquemas*.

2.5. Desarrollo de un esquema

El proceso Inter-Intra y Trans desarrollado por Piaget es un mecanismo que tiene un carácter constructivo y reflexivo al mismo tiempo, mediante este proceso se puede describir un orden secuencial en el cual se puede describir el progreso de la inteligencia.

En el l orden secuencial de los niveles, todas las transformaciones del nivel Trans, con sus elementos, propiedades y conjunciones lógicas, genera transformaciones en las acciones y procesos del nivel Inter, las cuales a su vez implican que el sujeto reconozca los elementos y propiedades encontradas en la etapa Inter.

Aldana (2011) en su trabajo de investigación en el que describe los niveles de comprensión de la integral definida cita a (Piaget y García, 1982), en su estudio se plantea que "el desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante, por el que el conocimiento crece según ciertos mecanismos" descrito tres niveles o fases: Intra, Inter y Trans, quienes configuran una triada que ocurre en todos los campos del pensamiento, por lo que no es específico del pensamiento científico. Estas tres fases del desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1982) lo cita Aldana (2011) de la siguiente manera:

- **Nivel intra,** "lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse" (Piaget y García, 1982, p. 163).

- **Nivel ínter,** "una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos" (Piaget y García, 1982, p. 165).
- **Nivel trans,** "es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de estructuras" (Piaget y García, 1982, p. 167).

Para hacer más completo el análisis de la comprensión tendremos en cuenta a Piaget y García (1982, p. 162), quienes tienen a consideración "que cada fase o nivel (intra, inter o trans) implica a su vez algunas subetapas, y que lo fundamental es que siguen el mismo orden y por las mismas razones". En la presente investigación se hace referencia a los niveles y subniveles así: Intra 1, Intra2, Inter 1, Inter2 y Trans. (Op. Cit. p 71).

Por **síntesis** aquí, entendemos el proceso por el cual a partir de una cosa que se conoce, realizando operaciones con/sobre ella se llega a la conclusión y comprensión de algo que no se conocía. (Op. Cit. p 71).

En la descripción del significado del conocimiento matemático sobresalen algunas declaraciones, como la tendencia a responder o la solución de problemas en un contexto social. La primera de éstas se refiere a lo que una persona puede hacer o responder ante un problema en un momento dado, lo cual no implica que esa persona pueda hacerlo en forma exitosa. La segunda declaración tiene que ver con la necesidad de interacciones sociales de los estudiantes en sus tareas.

(Didacticoliliana, 2010) en un comentario de un blog describe de manera precisa que una extensión de los procesos de construcción descritos en la teoría de Piaget y García (1984), en el marco de las construcciones mentales de las acciones, procesos, esquemas y objetos, se consideran cinco formas de construcción (denominadas aspectos constructivos de la abstracción reflexiva) determinadas por las observaciones a estudiantes (Dubinsky, 1991), estos aspectos descritos por García (1998) son: **Coordinación**, **Encapsulación**, **Reversibilidad** y **Generalización.** Tomado de http://didacticoliliana.blogspot.com.co/2010/10/abstraccion.html

Proceso cíclico de construcción de los objetos abstractos dentro del marco teórico de Dubinsky (Dubinsky 1990, p.170)

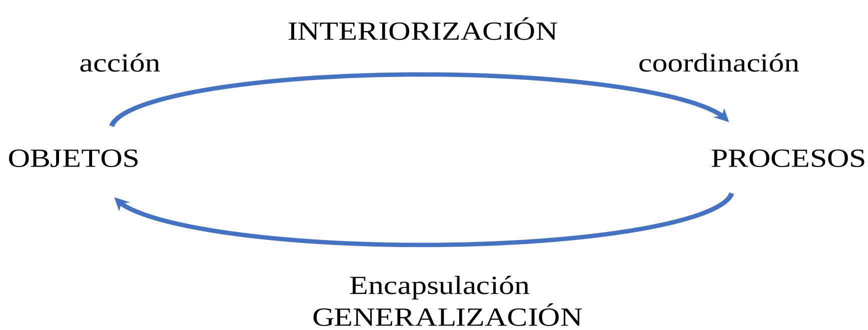


Figura 1: Esquema correspondiente al marco teórico de Dubinsky (1991a).

Aldana (2011) plantea que las construcciones mentales se realizan a través de unos mecanismos llamados abstracciones reflexivas y han sido caracterizados por RUMEC de la siguiente manera: Interiorización, Coordinación, Inversión, Encapsulación, Desencapsulación y Tematización. A diferencia de lo planteado anteriormente se puede observar que el proceso de reversibilidad se puede descomponer en dos mecanismos a saber: inversión y desencapsulación, y el mecanismo de generalización es descrito como una tematización. A continuación, citamos las definiciones descritas por este autor:

- **Inversión,** una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original. Piaget (1978), (según Dubinsky, 1991) no lo trata en el contexto de la abstracción reflexiva, lo incluye como una forma de construcción adicional
- **Desencapsulación,** es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen.
- **Tematización**, es la reflexión sobre comprensión de un esquema, viéndolo como "un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto, Asiala et al. (1996). En relación con este mecanismo, Piaget y García (1982, p. 103), definen la tematización como: "el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización" (Op cit. p 74).

El esquema presenta el proceso cíclico de construcción de los objetos abstractos con los procesos descritos de una manera más detallada, dicho proceso también se encuentra dentro del marco teórico de Dubinsky, y se hace referencia a este aporte para ampliar el campo de descripción de los procesos que se pueden observar en la construcción del conocimiento.

2.6. Descomposición genética

La noción de *descomposición genética* de un esquema conceptual se entiende como “la disposición particular de los esquemas conceptuales que son prerrequisitos para la formación del concepto y de las posibles conexiones que se establecen entre ellos*”* (Dubinsky y Lewin, 1986), este gran aporte se ha usado como elemento central de varios trabajos recientes dentro del marco de la teoría APOE. de compacidad (Dubinsky y Lewin, 1986), inducción matemática (Dubinsky y Lewin, 1986; Dubinsky 1986 y 1990).), de divisibilidad entera (Zazkis y Campbell, 1996), de la integral definida (Aldana 2011) y divisibilidad en el conjunto de los números naturales Bodí (2006), entre otros tantos que son mencionados a lo largo de la presente investigación.

Sin embargo, tal noción debería ser ampliada hasta incluir aquellos esquemas conceptuales que utilizan los alumnos, aunque no sean prerrequisitos para la formación de estos y que, de alguna forma, el alumno utiliza o coordina en la fase de construcción de la nueva estructura conceptual. Pues de esta forma, el investigador, que en ocasiones es el mismo docente de aula, puede tener una visión mucho más amplia de los esquemas utilizados por los alumnos, incluso los erróneos, y de tal forma establecer una categoría de comprensión de las tareas, que son a la vez manifestaciones externas de las diferentes formas de pensamiento del sujeto.

La noción de *esquema conceptual* será abordada de la siguiente manera. De un lado se define como "rica red interconectada de conceptos y relaciones" (Bell, Costello, y Küchermann, 1983), mientras que Dubinsky lo aterriza de la siguiente manera "colección más o menos coherente de objetos cognitivos y procesos mentales internos para manipular tales objetos" (Dubinsky, 1991b). Al recurrir a un esquema, el sujeto usa un número determinado de hechos, procedimientos y conceptos que pueden utilizarse en la resolución de problemas, los cuales serán exteriorizados o expresados en sus respuestas; estas pueden ser registradas de manera escrita o verbal. "Es esta cualidad funcional de la noción de esquema, la de ser construido, reconstruido y extendido con el objetivo preciso de dar sentido y resolver una situación problemática mediante su asimilación y acomodación a los esquemas existentes, la que consideramos importante y central en toda descomposición genética" García (1998).

De esta manera podemos inferir, que la descomposición genética de un esquema conceptual particular se alimenta de esquemas conceptuales previos, y a través de la coordinación el estudiante construye el conocimiento del esquema conceptual particular, Asiala *et al*., (1996, p. 7), define la descomposición genética del concepto como el *"conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo"*. Mediante la descomposición genética se establecen las conexiones entre los esquemas conceptuales previos y las diferentes formas de coordinación, por lo cual es indispensable determinar el proceso APOE para el concepto que se está construyendo. Aquí la abstracción reflexiva juega un papel fundamental como medio para la encapsulación, (Salgado, 2007).

Una DG no es única, pero es una vía para aprender y construir conscientemente un concepto matemático por parte del individuo, según (Trigueros, 2005, p. 8), *pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio*. Según (Trigueros y Oktac, 2005), se aprueba la posibilidad de que varias descomposiciones genéticas coexistan para la construcción de un mismo concepto siempre que este instrumento describa las observaciones de los trabajos de los estudiantes.

2.7. Ciclo de investigación en APOE

En la teoría APOE se integran tres componentes que generan un ciclo de investigación, los cuales son: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

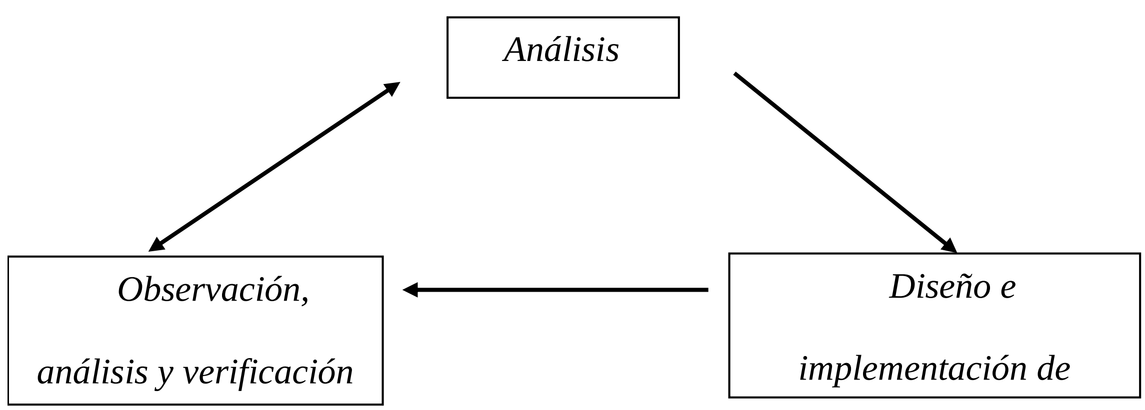


Figura 2: Ciclo de investigación (Asiala, et al., 1996)

La aplicación de este ciclo permite conseguir una descripción más detallada y cercana a la construcción que realizan los estudiantes de aquellos conceptos matemáticos sobre los que deseamos indagar.

2.7.1. Análisis teórico

Según (Roa, *et al.*, 2010) el análisis teórico tiene como objetivo principal el diseño una Descomposición Genética hipotética para modelar de manera cognitiva y epistemológica el concepto matemático que se está estudiando. La descripción de las construcciones mentales es fundamental en este proceso. (p.90). Según como lo describe García (1998), la descomposición genética de un esquema conceptual juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues permite comprender un método mediante el cual los estudiantes construyen el conocimiento, de manera que se deben tener en cuenta los siguientes aspectos para su construcción y análisis:

> *1. Un análisis de contenido tomado del currículo, libros de texto, incluyendo el desarrollo de didácticas y la formación del profesor, quien determina qué tipo de contenidos se hacen indispensables en la construcción del concepto.*
> *2. Un análisis de conocimientos previos de los estudiantes y esquemas ya utilizados por los estudiantes y la construcción del conocimiento específico, para lo cual se realiza la intervención pedagógica en el aula, mediante estrategias que el profesor considere más adecuadas según las condiciones del entorno.*
> *3. La aplicación de un marco teórico que permita valorar el trabajo experimental llevado a cabo con los estudiantes, y que permita describir paso a paso la construcción del concepto.* (p.16).

De aquí que la construcción de un esquema conceptual es de gran utilidad para orientar acciones didácticas en el aula que permitan realizar una práctica educativa de manera eficaz, teniendo en cuenta los factores claves del concepto y las competencias a desarrollar en los estudiantes, es decir, describe las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, entre otras) que un individuo puede realizar para construir un determinado concepto matemático. Además, se utilizan los resultados de investigaciones previas, el análisis de libros de texto y otros aspectos que se estime que contribuyan a la delineación de un camino posible de construcción de un concepto determinado. (Gamboa 2013).

Es Von Glasersfeld (1991) quien plantea que todo esquema, por su propia génesis, está compuesto de tres elementos. En el primero, mediante la asimilación-acomodación el individuo se ha reequilibrado después de recibir un estímulo al enfrentar una situación problema. En segundo lugar, la actividad que el sujeto asocia con tal estímulo. En dicha actividad se pueden encontrar las acciones físicas y los procesos mentales que posee el sujeto, y que son derivados de asimilar los esquemas. En tercer lugar, la experiencia adquirida a través de la actividad realizada. Que le permitirá reconocer el tipo de problema, reconocer otros esquemas para coordinarlos y aplicarlos.

En la búsqueda de la descomposición se realiza primero el diseño de una entrevista con los estudiantes, con la finalidad de observar en ellos sus habilidades, sus estructuras cognitivas previas, entre otras formas de pensamiento.

Aquí se puede hacer el diseño de la instrucción realizándose las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles acciones se pueden realizar de manera que los estudiantes puedan interiorizar un proceso?
- ¿Cómo puedo hacer para que los estudiantes coordinen dos o más de estos procesos para resolver situaciones?
- ¿Cómo puedo hacer para que los estudiantes encapsulen los procesos en objetos?

- ¿Cómo puedo lograr que los estudiantes tematicen un objeto matemático?

2.7.2. Diseño e implementación de la enseñanza

El diseño y la implementación de la enseñanza está basado en el análisis teórico realizado inicialmente, y su propósito es que los estudiantes puedan hacer las construcciones mentales planteadas bajo la estructura que se ha propuesto. Lo cual nos abre paso a un aspecto fundamental del componente de diseño e implementación de la enseñanza y elemento central de la presente investigación. El conocimiento se construye mediante acciones sobre los objetos, que al ser interiorizadas se constituyen en procesos que mediante una forma de construcción se encapsulan en objetos. El componente didáctico de esta teoría es el ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios), que permite llevar al aula de clases la enseñanza de los conceptos lógico matemáticos analizados en la descomposición genética.

2.7.3. El ciclo ACE

ACE es el nombre que se le ha dado al ciclo de enseñanza (*Activities, Class discussion and Excercises*), el cual consiste en reemplazar las lecciones con métodos interactivos, constructivos y con aprendizaje colaborativo, Dubinsky junto al grupo RUMEC han provisto a la teoría APOE de esta herramienta que puede hacer parte del ciclo de investigación sobre la cual se pueden implementar y diseñar las enseñanzas bajo esta metodología y su propósito es el de ayudar a realizar las construcciones mentales a los estudiantes, basado en una descomposición genética hipotética. ACE se traduce al español de la siguiente manera:

(A) actividades: Se deben plantear situaciones o informaciones donde el trabajo colaborativo debe ser eje fundamental de las actividades a las que se enfrentan al estudiante. **(C)** Discusión en clase: el trabajo colaborativo debe generar una mejor asimilación y acomodación de las actividades realizadas. **(E)** Ejercicios: que buscan el reforzamiento y posible extensión de sus ideas.

Mediante la secuencia didáctica ACE, los estudiantes se entrenan en la realización de acciones y procesos que permitan establecer relaciones entre ellos, de manera que se pueda dar la interiorización y los procesos puedan ser convertidos en acciones, desarrollando así procesos de pensamiento más avanzados sobre un objeto matemático determinado. Las situaciones problema planteadas en la secuencia didáctica permiten encapsular los procesos en objetos, y la práctica sobre estas situaciones de aprendizaje promueven construcciones mentales para la esquematización del objeto matemático.

2.7.4. Análisis de los datos

El paso que sigue es realizar una recolección de datos para realizar un análisis mediante cuestionarios y entrevistas audiograbadas y videograbadas con los estudiantes. El análisis teórico de los datos está encaminado en investigar si los estudiantes están realizando las construcciones mentales de tal forma que estén aprendiendo de manera estructurada un concepto, y en caso de que esto no esté sucediendo, realizar el análisis del porqué no se está dando.

Los datos obtenidos deben ser observados y verificados mediante su análisis. Básicamente consiste en detectar cuáles de las construcciones mentales planteadas en la descomposición genética producida en el análisis teórico, no han sido evidenciadas o ni siquiera se han tenido a consideración por los estudiantes. Este análisis permite realizar ajustes a la descomposición genética inicial para continuar el ciclo operativo de investigación de la teoría APOE, con el propósito de comprender cómo el concepto se desarrolla en la mente del estudiante de una manera más clara, ordenada y profunda. Una vez hecho esto, el ciclo se repite, haciendo ya sea una revisión y/o una reformulación de la descomposición genética, su puesta en práctica, y cualquier otro proceso que requiera ser ajustado.

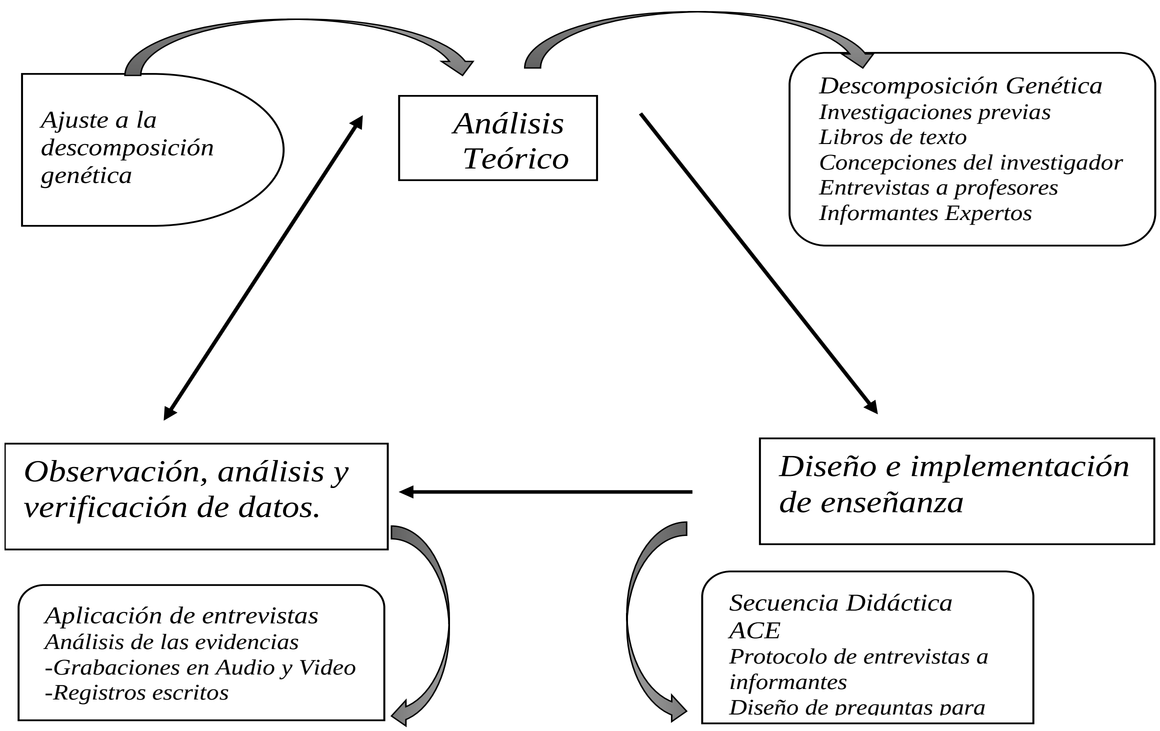


Figura 3: Ciclo de Investigación APOE Completo. Fuente: Elaboración Propia.

Diferentes trabajos de investigación han asumido esta teoría APOE, como marco para analizar la comprensión que tienen los estudiantes de diferentes conceptos matemáticos. La descripción de las construcciones mentales o formas de conocer, los mecanismos de construcción y la triada de desarrollo del esquema, utilizados en la comprensión de los conceptos matemáticos constituyen el eje fundamental de estas investigaciones en el marco de la teoría APOE.

Utilizando esta perspectiva teórica se han realizado múltiples investigaciones entre las que se encuentran las siguientes: el concepto de límite (Cottrill et al. 1996); clases laterales, normalidad y grupos cocientes (Asiala et al. 1997); grupos y subgrupos (Brown et al. 1997); regla de la cadena (Clark et al. 1997; Cottrill, 1999); las funciones exponencial y logarítmica (Weber, 2002); cálculo gráfico (Baker et al. 2000; Cooley et al. 2003); inecuaciones (Barbosa, 2003); la derivada (Asiala et al. 1997; Badillo, 2003; Sánchez – Matamoros, 2004; Sánchez – Matamoros, García y Llinares 2006); la divisibilidad (Bodí, 2006); series numéricas (Codes y Sierra, 2004, 2007), la integral definida (Aldana 2011) entre otras que no solo realizan sus aportes en el campo de la matemática sino también a la teoría propuesta por Dubinsky, la cuál es en mi nodo de ver un modelo que ayuda a ordenar el pensamiento matemático para la evolución de su enseñanza y aprendizaje.

2.8. Sobre los números decimales según la organización de los sistemas numéricos.

Cabe resaltar que en la presente investigación nos acogemos a la propuesta de Socas (2012) de considerar el conjunto de los números decimales “D” como un sistema numérico propio e independiente dentro de los sistemas numéricos, quien describe en un cuadro las diferentes propiedades más características:

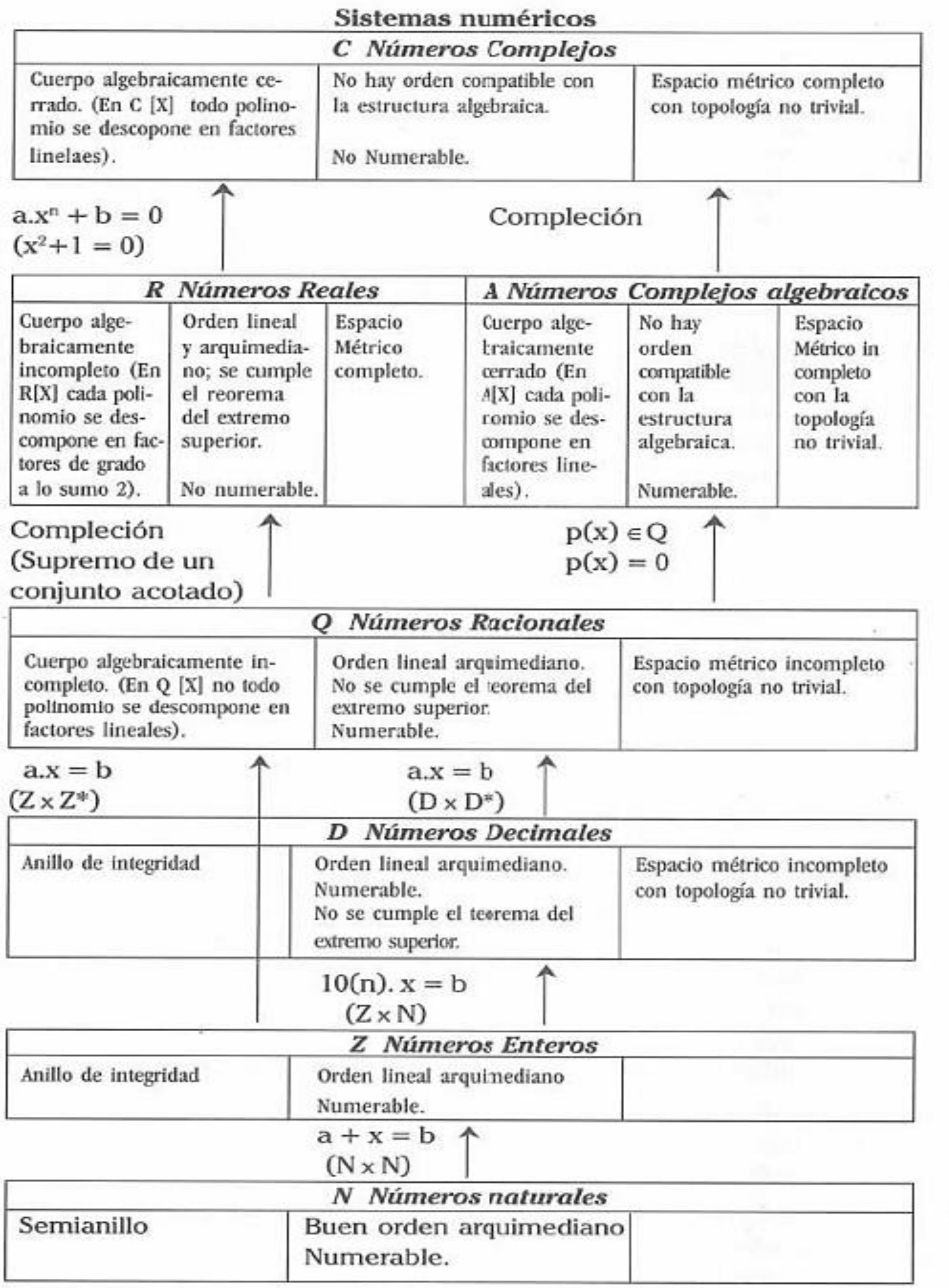


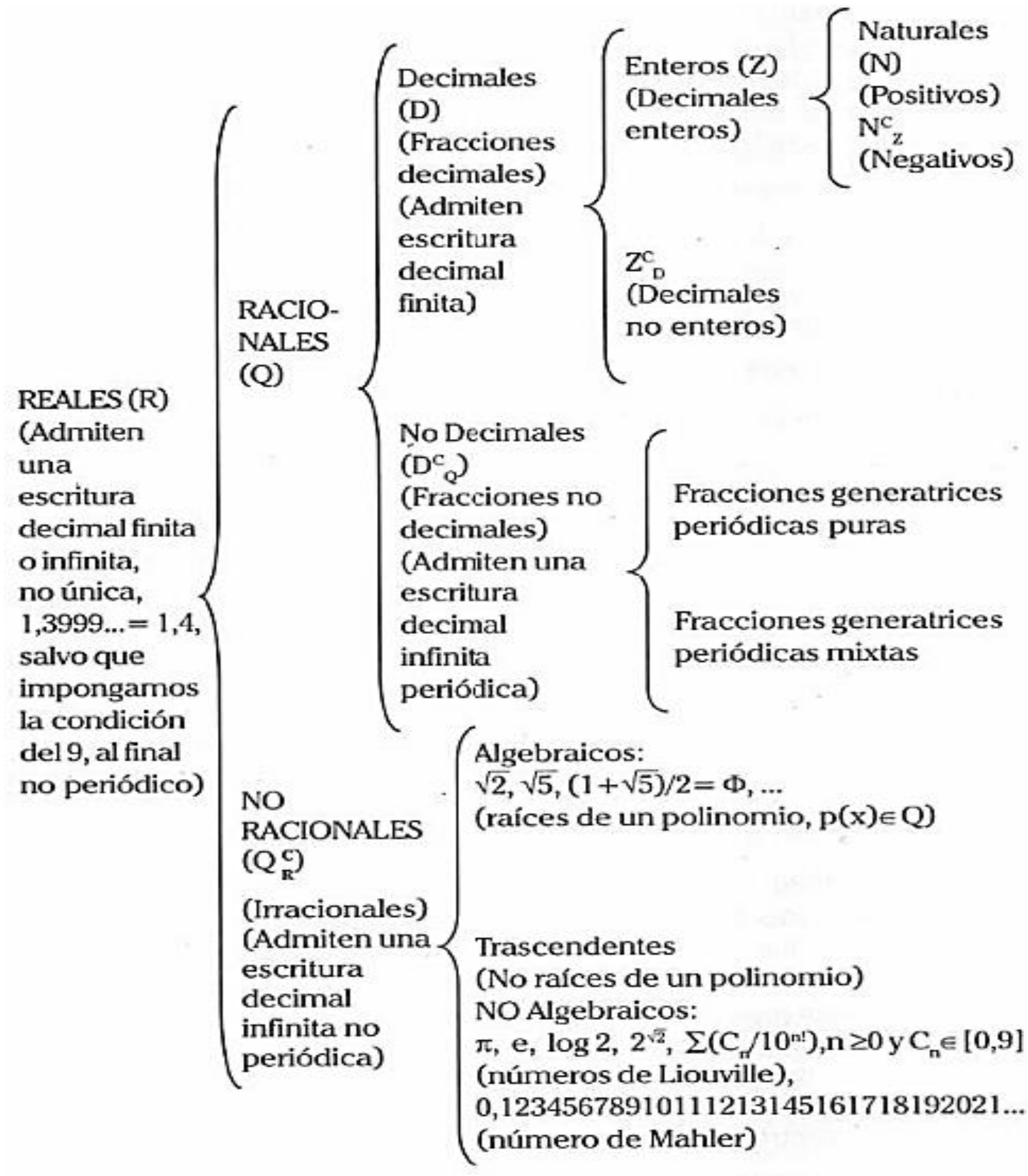
Figura 4: *Los sistemas numéricos.*

Fuente: Socas, M. Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Volumen 50, junio de 2002, p 19-34

De esta manera Socas (2011) plantea una propuesta de organización curricular en el que se le asigna a los números decimales un papel relevante en el desarrollo de los números en el ámbito educativo.

Figura 5

Propuesta de organización curricular de los sistemas numéricos.



Fuente: Socas, M. Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Volumen 50, junio de 2002, p 19-34

Capítulo 3: Metodología de la investigación

3.1. Método de investigación

El estudio de la comprensión del concepto de número decimal aquí presentado se realizó con estudiantes de grado sexto con edades que van desde los once hasta los trece años, en el marco de la teoría APOE ya que pretende escudriñar tanto los niveles de comprensión de este objeto matemático como los niveles de desarrollo de dicha comprensión, para lograr este propósito se realizó un análisis de libros de texto presentes en el contexto de enseñanza de los estudiantes, y a través de investigaciones, complementar los vacíos conceptuales referentes al concepto de número decimal, con base en este análisis, plantear una descomposición genética, la cual dará la ruta a seguir para la planeación y ejecución de una secuencia didáctica siguiendo los parámetros brindados por el ciclo ACE, en la cual se abordarán los conceptos básicos y fundamentales para la apropiación del concepto de número decimal tales como lo son en primera instancia los saberes previos, y posteriormente la comprensión del concepto como tal, sus características, diferencias sensibles con otros conjuntos numéricos y sus aplicaciones.

Una vez realizada la intervención en el aula se procedió con la elaboración y aplicación del cuestionario inicial, se realizarán los ajustes que arrojen los resultados del estudio de la validez y se aplicó la prueba definitiva. Inmediatamente se procederá con las entrevistas con preguntas basadas en el cuestionario, estas entrevistas serán transcritas y relacionadas cada una con las preguntas de la prueba para analizar los niveles de comprensión. Con el propósito de determinar los niveles de comprensión se analizaron las caracterizaciones de los niveles y los subniveles, según la ruta que muestren los estudiantes se realizará la propuesta de una descomposición genética definitiva, posterior a esto las conclusiones.

Según lo descrito anteriormente el ciclo de investigación que nos propone el marco teórico APOE se divide en 4 fases o etapas durante el proceso de investigación, así:

- Fase 1:

  - Análisis de textos escolares.
  - Análisis de libros especializados.
  - Cruce de la información.
  - Descomposición genética inicial del concepto de número decimal.

- Fase 2:

  - Diseño de la prueba piloto.
  - Aplicación de la prueba piloto.
  - Revisión, registro y análisis de resultados del cuestionario piloto.
  - Estudio de validez de la prueba.
  - Ajustes al cuestionario piloto y diseño de la prueba definitiva.

- Fase 3

  - Aplicación de la prueba definitiva.
  - Aplicación de las entrevistas.
  - Revisión, registro y análisis de resultados de la prueba definitiva.
  - Análisis de las formas de conocer APOE.

- Fase 4:

  - Transcripción de las entrevistas y caracterización de los niveles y subniveles de comprensión inter, intra y trans.
  - Determinación de la descomposición genética final.
  - Conclusiones
  - Escritura de la memoria de tesis de Maestría

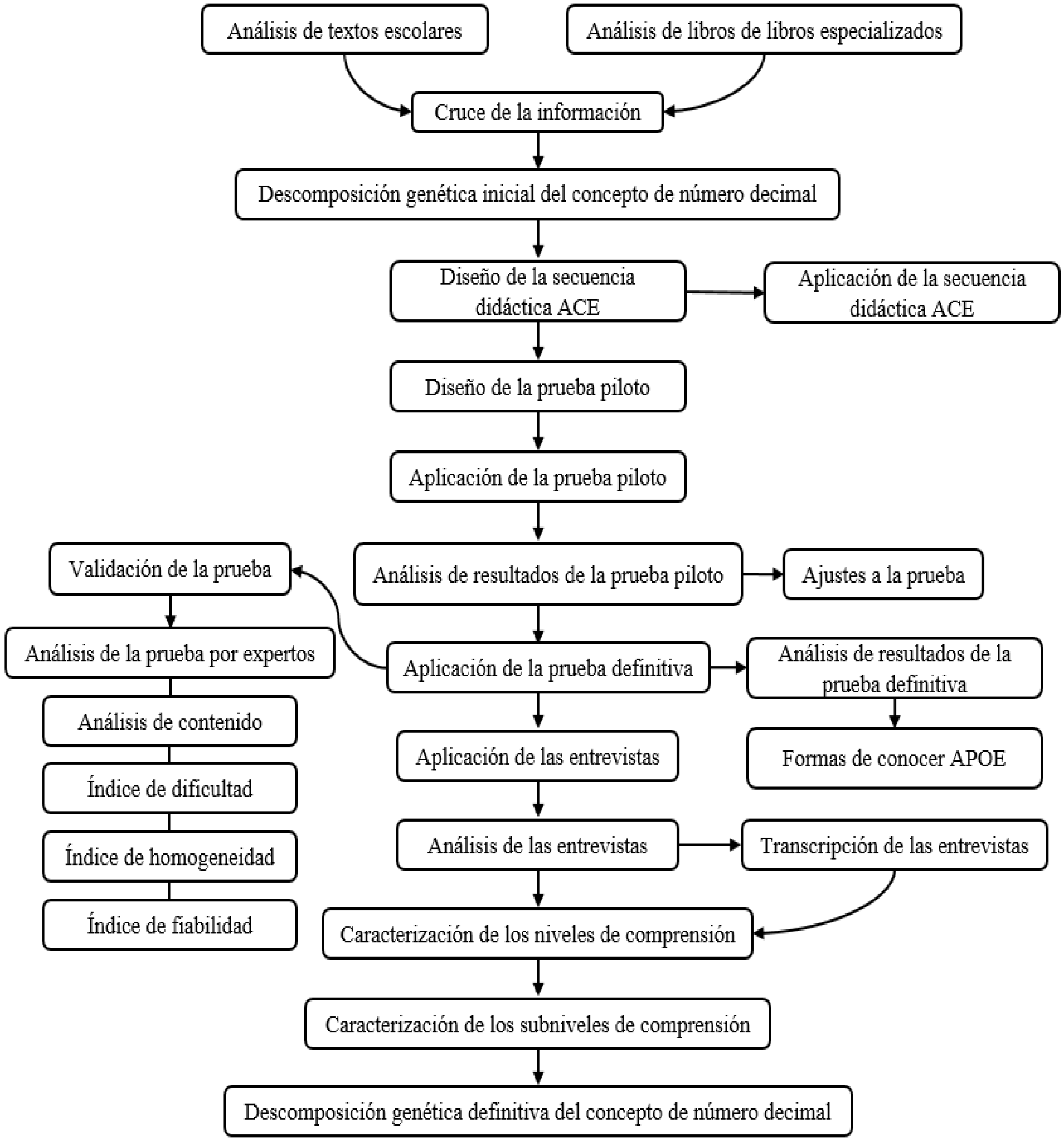


Figura 6: Ciclo de investigación de la comprensión del concepto de número decimal en el marco de la teoría APOE

Se realizó un análisis estadístico de los datos antes de proceder con el análisis de la comprensión de la manera como los estudiantes hicieron la construcción del concepto y hasta dónde lograron llegar en dicha comprensión. Se espera que basado en los resultados obtenidos en la prueba escrita y en las entrevistas se puedan hacer mejoras a la ruta de comprensión descrita en la descomposición genética hipotética.

3.2. El Análisis Teórico

Una característica importante de la teoría APOE es que parte de la reflexión de los conceptos desde la definición matemática, situación ya descrita y mencionada por Trigueros (2005), por tal motivo se realizó el análisis de las definiciones entregadas en los libros para dar una versión depurada en la secuencia didáctica a los estudiantes de manera que ellos puedan realizar una construcción del concepto de número decimal basados en los conceptos brindados como insumo principal que sirva como medio para la comprensión y que permita en una etapa posterior realizar una medición de sus alcances.

Con el propósito de realizar la descomposición genética del concepto de número decimal se realizó el análisis de 5 libros de texto, de ediciones Colombianas, seleccionados al azar de la biblioteca de la I.E. Héctor Ángel Arcila, lugar donde se realizará la práctica educativa, estos libros, por experiencia propia son algunos de los más usados en los contextos educativos en Colombia y teniendo en cuenta que todavía se usan ediciones antiguas para la enseñanza en sectores vulnerables y de ubicación rural, de esta manera, estos libros de texto serán tomados como base para la presente investigación (Ver Anexos C, D, E, F y G en CD):

- Bermúdez, Maria T (2014). Enlace Matemáticas 6. Bogotá. Educar.
- Galarza, Ricardo et al. (2014). Conecta Matemáticas 6. Bogotá. SM.
- Collins, William et al. (2000). Matemáticas Aplicaciones y Conexiones 6. Bogotá. Mc Graw Hill.
- Rueda La Rotta, Fernando. (2007), Nuevas Matemáticas 6. Bogotá. Santillana.

- Ortiz Wilches, Ludwig Gustavo et al. (2013). Los Caminos del Saber 6. Bogotá. Santillana.

3.2.1. Análisis de Textos Escolares

En el presente análisis solo se tienen en cuenta los factores clave y la manera como éstos están definidos, luego se adaptarán y construirán los elementos necesarios para construir el esquema del concepto de número decimal a partir de su descomposición genética, también se realizarán investigaciones de trabajos previos que tengan que ver con cada uno de los ítems que hagan parte del concepto de número decimal, teniendo en cuenta los conocimientos previos y algunas de sus aplicaciones.

En la siguiente tabla se están comparando los contenidos de cada uno de los libros de texto y el capítulo en el que aparece, el chulo indica que el tema está contenido en el libro, pero es abordado de manera indirecta por medio de prácticas o ejercicios, esto hace que carezca de riqueza a nivel de contenido teórico para la construcción de un concepto, y los espacios en blanco indican que el libro no aborda el tema.

Tabla 1
Comparación de contenidos de los libros de texto de matemáticas grado 6.

Enlace Matemáticas 6	**Conecta Matemáticas 6**	**Matemáticas Aplicaciones y conexiones 6**	**Nuevas Matemáticas 6**	**Los Caminos del Saber 6**
1.1. Fracción como cociente	1. Fracciones y números decimales.	3-1. Decimales hasta las diezmilésimas.	3.1. Fracciones decimales	3.1. Fracción decimal
1.2. Fracción decimal y número decimal	2. Cifras decimales		3.2. Decimales	3.2. Número decimal
1.3. Parte entera y parte decimal de un número.	✓	✓	✓	✓
			3.3. Conversiones	✓
		3-2. Integración: Mediciones.		

	3. Números decimales en la semirrecta numérica.	✓	✓	✓
			3.4. Clasificación de decimales.	3.3. Clasificación de decimales.
1.4. Orden de los números decimales.	4. Comparación de números decimales.	3-3. Compara y ordena decimales.	3.5. Comparación de decimales	3.4. Orden en los números decimales.
1.5. Aproximación de números decimales por redondeo.	5. Truncamiento de números decimales.	3-4. Redondea decimales.		
	✓	✓	3.6. Representación de decimales en la recta numérica.	3.5. Representación de decimales en la recta numérica.
Práctica lo aprendido.	✓	✓	. ✓	✓
	✓		✓	3.6. Los decimales y los porcentajes.
		3-5. Estima sumas y diferencias.		
Adición y sustracción de números decimales	7. Adición y sustracción de números decimales	3-6. Suma y resta de decimales	4.1. Adición de números decimales.	4.1 Adición de números decimales
✓	✓	✓	4.2. Sustracción de números decimales.	4.2. Sustracción de números decimales.
Práctica lo aprendido.	✓	✓	✓	✓
			4.3. Expresiones aritméticas con números decimales.	✓
	8. Multiplicación de un número decimal por 10, 100, 1000…			
		4-1. Multiplicación de decimales por números enteros 4-2. Propiedad conmutativa y asociativa de los números naturales. 4-3. Usa la propiedad distributiva.	✓	
3.1. Multiplicación de números decimales.	9. Multiplicación de números decimales	4-4. Multiplica decimales.	4.4. Multiplicación de números decimales	4.3. Multiplicación de números decimales
	✓		4.5. Potenciación de números decimales. 4.6. Expresiones con multiplicación y potenciación de números decimales.	
		4-5. Perímetro y área.		
3.2. División de números decimales.	10. División de números decimales.	4-6. Divide decimales entre números enteros. 4-7. Divide entre decimales	4.7. División de números decimales.	4.4. División de números decimales.
			✓	4.5. Operaciones combinadas y aplicaciones.
	11. Números decimales y porcentajes.		4.8. El porcentaje.	✓
	12. Potencia de un número decimal.		✓	
Práctica lo aprendido.	Actividades. Resolución de problemas	✓	La matemática herramienta para otras ciencias.	Problemas para repasar
✓	✓	✓	✓	¿Y esto que aprendí para que me sirve?
	✓			Trabaja con SMathStudio

En la parte superior los contenidos tenidos en cuenta para la investigación (color verde)

Para la presente investigación solo se hizo el análisis de los contenidos para la descomposición genética en los primeros capítulos, es decir, solo aquellos que hacen referencia a la comprensión del concepto sin tener en cuenta la comprensión de las operaciones debido a que el estudio se haría muy extenso, también se tendrán en cuenta algunas aplicaciones como los porcentajes, las medidas, el concepto de densidad y se ampliará hasta llegar a la comprensión de número irracional.

3.2.2. Análisis de Textos Especializados en el Concepto de Número Decimal

Adicional a esto se analizaron 2 libros de texto con el propósito de revisar acciones y procesos que no son tenidos en cuenta en los otros libros de texto, éstos son: *Matemáticas para Maestros* de Godino, Juan D; Cid, Eva; Batanero, Carmen, 2004 y *Los Decimales: Más que una Escritura* de Ávila Storer, Alicia; García Peña Silvia, 2008. Estos textos complementan la construcción de los objetos matemáticos ya que presentan temas y conceptos que no han sido abordados en los libros de texto anteriormente analizados, estos dos autores han desarrollado investigaciones en la comprensión de los elementos que hacen parte del concepto de número decimal y serán un punto de referencia para complementar la construcción de la descomposición genética (Ver Anexos H e I en CD).

3.3. Contenidos para la Descomposición Genética del concepto de Número Decimal

Se plantea la siguiente descomposición genética hipotética del concepto de número decimal teniendo en cuenta los temas investigados en los libros de texto. Después de haber realizado dicho análisis se determinó que los procesos y acciones deben estar desarrollados en el siguiente orden:

A. Concepto de potencias para cualquier base. **(SABER PREVIO)**
B. Descomposición en factores primos. **(SABER PREVIO)**
C. Reconocimiento del concepto de fracción como Parte-Todo. **(SABER PREVIO)**
D. Fracciones decimales. **(SABER PREVIO)**
E. Comprensión de la equivalencia de las diferentes representaciones semióticas de **fracción decimal**
F. Comprensión del proceso de conversión de **números fraccionarios a fracciones decimales.**
G. Comprensión del concepto de **Número Decimal.**
H. Comprensión de la relación entre una **fracción decimal** y una **expresión decimal.**
I. Conversión de un **número decimal** en una **fracción decimal. Fracción Generatriz.**
J. **Porcentajes.** Expresión de porcentajes en números decimales**.**
K. Comprensión de la **expresión polinómica** de un número decimal.
L. Comprensión de diferentes representaciones de **equivalencia de números decimales.**
M. **Compara y ordena** expresiones decimales.
N. Comprensión de la propiedad de **densidad.**
O. **Uso de expresiones decimales en las Unidades Métricas de Longitud.**
P. Comprensión de la **fracción como cociente.** (Transformación de Cocientes a Expresiones Decimales)
Q. Comprensión de conversión de una fracción a **expresión decimal finita e infinita.**
R. Comprensión de **expresión decimal infinita periódica.**

S. Comprensión de **expresión decimal periódica pura.**

T. Comprensión de **expresión decimal periódica mixta.**

U. **Fracción generatriz** de los racionales representados por expresiones **periódicas puras.**

V. **Fracción generatriz** de los racionales representados por expresiones **periódicas mixtas.**

W. Comprensión **de redondeo o aproximación** de expresiones decimales de un número.

X. **Números Irracionales.** Comprensión de expresión decimal infinita no periódica.

Número no decimal**.**

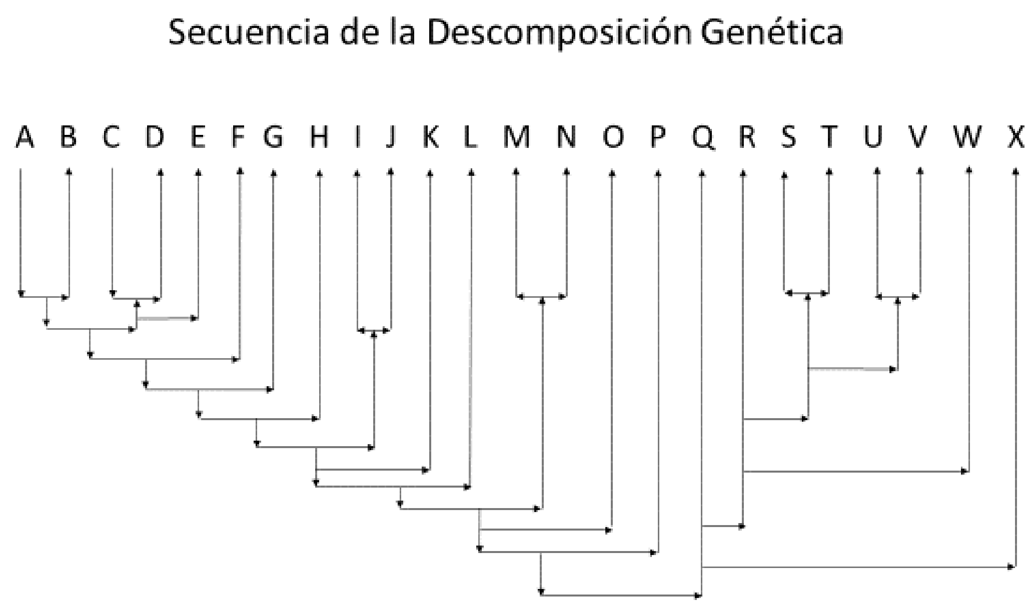


Figura 7: Secuencia de los contenidos de la descomposición genética.

A continuación, se realiza un estado del arte de las investigaciones que han sido realizadas para cada uno de los temas relacionados en el análisis de los textos.

3.4. Estado del Arte de los conceptos que hacen parte de la Descomposición Genética del concepto de Número Decimal

Para efectos de la construcción de la comprensión del concepto de número decimal, se pretende que el estudiante comience a realizar acciones y procesos sobre los objetos matemáticos potenciación, descomposición en factores primos y números fraccionarios, haciendo énfasis en las potencias de base 10 y sobre las fracciones decimales. Las acciones y procesos realizados a partir de allí mediante los mecanismos de abstracción reflexiva de interiorización, coordinación, inversión o reversión, encapsulación y desencapsulación serán la puerta de entrada para que el estudiante construya procesos y objetos relacionados con un esquema básico del concepto de número decimal, esquema básico debido a que en el transcurso de los estudios realizados en años posteriores los estudiantes pueden ampliar la estructura de este esquema y sus niveles de comprensión mediante la construcción de otras estructuras mentales asociadas a contextos relacionados con el concepto de sistema métrico decimal, notación científica, porcentajes y la ampliación del concepto en situaciones que requieren algoritmos de comprensión más avanzados como en el campo del infinito y los números reales, por mencionar algunos.

Principales contextos en la enseñanza de los números decimales: Se han utilizado diversos contextos en las prácticas de la enseñanza para hacer una introducción a los números decimales. Gómez (2010) en su investigación sobre las concepciones de los números decimales menciona que una revisión de los libros de texto vigentes desde la implantación y generalización del sistema público de enseñanza permite distinguir cuatro contextos principales en la enseñanza de los números decimales a saber: **La numeración, la medida, las fracciones decimales y la ampliación de los campos numéricos.**

En estos contextos se generan concepciones que constituyen maneras diferentes de entender los números decimales. Para comprender los fenómenos que contiene cada uno de los elementos que configuran el concepto de número decimal, se investiga cada uno de éstos para darle un adecuado tratamiento en la secuencia didáctica ACE (Ver Anexo J en CD). Estos contextos son tenidos en cuenta en la descomposición genética e introducidos en la secuencia didáctica con el propósito de trabajar con el estudiante una construcción más amplia del concepto de número decimal en cada uno de los diferentes campos. Se espera que, a mayor conocimiento, se hayan construido más relaciones entre los elementos matemáticos y que estas relaciones formen estructuras cognitivas que permitan la solución de problemas evocando un esquema específico y reconocer aquellas situaciones para las cuales el esquema no es adecuado. (Trigueros 2005).

3.5. Caracterización de la Descomposición Genética del concepto de Número Decimal

La descomposición genética del número decimal se realizará con base en los elementos matemáticos que configuran el concepto, entendiéndose por elemento "el producto de una disociación o de una segregación del concepto vinculada al concepto y a sus propiedades" (Piaget, 1963); también se realizará con base en las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos obtenidos a partir del análisis de libros de texto y estudios relacionados con cada uno de ellos.

Los elementos, sus relaciones lógicas, las construcciones mentales, las formas de representación y los conceptos clave serán relacionados a partir de una base de conocimientos previos, así: el concepto de exponente, la estructura aditiva de los exponentes, la estructura multiplicativa de las potencias, las propiedades de las potencias de 10, el concepto de número primo, los criterios de divisibilidad, el proceso de descomposición en factores primos, el concepto de número fraccionario comprendido desde el constructo parte-todo, equivalencia de números faccionarios, son principalmente los mencionados como saberes previos; desde esta instancia se abre la puerta a la comprensión del concepto de número decimal a partir de las fracciones decimales. Cabe resaltar en esta instancia que la asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto juega un papel primordial, adherido a esto “la relación inicial entre elementos previos y un nuevo concepto determina la construcción del conocimiento matemático, por las relaciones que pueden establecerse” (Kú y Roa 2010).

3.5.1. A. Comprender el concepto de potenciación. (SABER PREVIO)

Tabla 2
Acciones y procesos para resolver potencias.

Descripción de las acciones y procesos para resolver potencias.	A	P
• Contar las veces que se está multiplicando la base.	A	
Escribir la base con su respectivo exponente.	A	
▪ Comprender que un número que se multiplica por sí mismo un número definido de veces se puede expresar en forma de potenciación.		P
• Obtener la potencia multiplicando la base tantas veces como lo indique el exponente.	A	
▪ Comprender que el exponente determina el número de veces que se multiplica la base.		P

Entre estos dos procesos se hace evidente una transformación de la operación potenciación que se puede realizar en ambos sentidos, en este caso la inversión entre la notación del producto de la base b multiplicada n veces y la notación b elevado a la n.

Si al realizar el proceso de descomposición en factores primos, el número esté compuesto por 2 números primos diferentes que se multiplican el mismo número de veces, este número tiene la característica de ser una potencia exacta, por lo tanto, en este caso, para obtener la expresión potenciación de una potencia exacta, se deben coordinar de las siguientes acciones y procesos:

Tabla 3
Notación en forma de potenciación de un número que es una potencia exacta.

Descripción de las acciones y procesos para obtener la **notación en forma de potenciación** de un número que es una potencia exacta	A	P
• Determinar el divisor primo más pequeño posible y escribirlo al lado derecho.	A	
• Efectuar la división y escribirlo debajo del número que se está descomponiendo. (La división debe ser exacta).	A	
• Realizar el mismo proceso hasta que el cociente sea 1.		
▪ Descomponer el número dado.		P
• Escribir sus factores en forma de potencia.	A	
▪ Aplicar la propiedad de la multiplicación de potencias con el mismo exponente.		
▪ Multiplicar las bases.	A	
▪ Obtener la notación en forma de potenciación de un número que es una potencia exacta.		P

Este procedimiento se puede hacer mediante otras acciones en caso de que los estudiantes aún no hayan incorporado las propiedades de la potenciación a sus competencias aritméticas.

Tabla 4
Potenciación de un número que es una potencia exacta.

Descripción de las acciones y procesos para obtener la **potenciación** de un número que es una potencia exacta	A	P
• Determinar el divisor primo más pequeño posible y escribirlo al lado derecho.	A	
• Efectuar la división y escribirlo debajo del número que se está descomponiendo. (La división debe ser exacta).	A	

• Realizar el mismo proceso hasta que el cociente sea 1.		
▪ Descomponer el número dado.		P
• Se multiplican los factores primos diferentes uno a uno formando factores compuestos iguales.	A	
• Escribir los nuevos factores en forma de potencia	A	
▪ Obtener la potenciación de un número que es una potencia exacta.		P

El objeto matemático descomposición en factores primos tiene muchos usos, en este caso este proceso se coordina con otras acciones para hacer la *inversión* del proceso asociado a obtener la base y el exponente de una potencia dada.

3.5.2. B. Descomposición en factores primos. (SABER PREVIO)

Tabla 5
Acciones y procesos que configuran la descomposición en factores primos.

Descripción de las acciones y procesos para obtener la **descomposición en factores primos**	A	P
• Determinar el menor número primo por el cual el número sea divisible.	A	
• Dividir por el número primo tantas veces como sea posible.	A	
• Realizar el mismo proceso hasta que el cociente sea 1	A	
▪ Cuando ya no sea posible seguir dividiendo por un número primo, determinar el siguiente número primo en orden consecutivo de menor a mayor por el cual se pueda dividir.		P
• Dividir los cocientes por números primos consecutivos hasta que el último cociente sea 1.	A	
• Expresar el número como producto de factores primos.	A	
▪ Descomposición en factores primos de un número.		P

3.5.3. C. Reconocimiento del concepto de fracción como Parte-Todo. (SABER PREVIO)

Tabla 6
Acciones y procesos para obtener concepto de fracción como Parte-Todo.

Descripción de las acciones y procesos para obtener concepto de fracción como Parte-Todo.	A	P
• Reconoce la unidad como un objeto o como una colección de objetos.	A	

• La fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales.	A	
• Se dividen las unidades en tantas partes como indique el denominador.	A	
• Se toman tantas partes como indique el numerador.		
▪ Un número fraccionario representa una cantidad de partes tomada de una unidad o de una colección de objetos		P
▪ Comprende la conversión de representación gráfica a forma simbólica matemática y viceversa.		P

Otro elemento necesario para la configuración de la comprensión de número decimal que concierne al concepto número racional es el de simplificación y amplificación, y tiene que ver con la comprensión de las fracciones equivalentes; la asimilación de este concepto es necesaria para que el estudiante, mediante el mecanismo de coordinación interiorice el proceso de conversión para expresar una fracción decimal simplificada en forma de fracción decimal, y a su vez, aplicar el mecanismo de reversión para hacer simplificar una fracción decimal, esto ocurre cuando la fracción decimal se está ocultando a simple vista cuando está representada mediante una fracción que tiene un denominador que no es una potencia de 10.

En este caso se hará alusión a la comprensión de equivalencia restringida al hecho de que al amplificar o simplificar una fracción, vamos a obtener una fracción equivalente; esto llevará al estudiante a abstraer de manera reflexiva que, aunque el número de partes tomado de un todo es diferente, representa la misma cantidad.

Tabla 7
Acciones y procesos que configuran la comprensión de fracciones equivalentes.

Descripción de las acciones y procesos para obtener fracciones equivalentes.	A	P
• Las fracciones se pueden amplificar multiplicando el numerador y el denominador por el denominador por el mismo número.	A	

• Las fracciones se pueden simplificar dividiendo el numerador y el denominador por el denominador por el mismo número.	A	
▪ Las fracciones obtenidas amplificar y simplificar una fracción dada representan la misma cantidad.		P

3.5.4. D. Fracciones decimales.

Tabla 8

Acciones y procesos que configuran la comprensión de las fracciones decimales.

Descripción de las acciones y procesos para obtener fracciones equivalentes.	A	P
• La fracción decimal corresponde a la idea de dividir una totalidad en 10 partes iguales de manera sucesiva.	A	
• Se divide la unidad en tantas partes como indique el denominador.	A	
• Se divide la unidad en 10 partes para formar las décimas.	A	
• Se dividen las décimas en 10 partes para formar las centésimas.	A	
• Se dividen las centésimas en 10 partes para formar las milésimas.	A	
• Comprender que la subdivisión en 10 partes se puede realizar un número infinito de veces.	A	
• Se toman tantas partes como indique el numerador.	A	
▪ Una fracción decimal representa partes de la unidad divididas en potencias de 10 tomadas de una unidad o de una colección de objetos		P
▪ Comprende la conversión de representación gráfica a forma simbólica matemática y viceversa.		P

Al comprender de la fracción como medida, se posibilita la comprensión de la fracción decimal como un porcentaje. Este concepto se configura mejor cuando el estudiante realiza una abstracción reflexiva, coordinando el concepto de porcentaje con el de fracción decimal al asimilar que el tanto por ciento de una cantidad es una fracción cuyo denominador es 100. La fracción como operador y el producto de números fraccionarios hacen su parte en este proceso. También se puede adquirir una estructura lógica de un nivel superior en el momento que pueda hacer uso del porcentaje en forma de número decimal y coordinarlo con el producto de números decimales para obtener el porcentaje de una cantidad dada.

3.5.5. E. Comprensión de la equivalencia de las diferentes maneras de representar una fracción decimal

Comparar los diferentes tipos de representación semiótica de una fracción decimal genera un encapsulamiento de estos procesos en un objeto, herramienta con la cual sería muy fácil abordar la comprensión de las diferentes expresiones decimales (finitas e infinitas periódicas).

En este punto de la descomposición genética se genera una encapsulación del objeto fracción decimal. Mediante el proceso de abstracción reflexiva el estudiante logra realizar transformaciones mediante acciones y procesos que implican la construcción de una fracción decimal, de manera que ya puede pensar sobre estas como un objeto. Con este conocimiento el estudiante ya puede determinar si una fracción es decimal o no y expresarla en forma de expresión decimal a partir del lenguaje natural; también puede relacionar esta notación con el sistema métrico decimal (una décima parte, una centésima parte…).

Tabla 9
Comprensión del concepto de fracción decimal (Objeto)

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión del concepto de fracción decimal.	A	P
• Representación escrita en lenguaje natural de las fracciones decimales (Lectura de fracciones decimales)	A	
• Representación de una fracción decimal en forma de fracción simplificada.	A	
• Reconocimiento de lo que no es una fracción decimal.	A	
▪ Reconocimiento y representación de las fracciones decimales con el Sistema Métrico		P
▪ Representación en forma de fracción de las expresiones decimales.		P

En ocasiones se presentan situaciones en las que necesitamos averiguar la cantidad que corresponde a una fracción decimal como por ejemplo cuanto es la décima parte de un número, muy parecido a lo que se piensa cuando se busca un porcentaje, o también cuando en ciencia se habla del tamaño de una célula que se mide en centésimas de milímetro. Estas situaciones dan pie al uso de las fracciones decimales en un contexto determinado.

Tabla 10
Comprensión de la cantidad que representa una fracción decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de la **cantidad que representa una fracción decimal.**	A	P
• Se multiplica el numerador por el número al que se le va a encontrar una fracción decimal.	A	
• Se pone el mismo denominador.	A	
▪ Se multiplica la fracción decimal por el número.		P

Por ejemplo, para encontrar los 3/5 de 20.

Tabla 11
Comprensión de medida en fracción decimal

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de la **cantidad que representa una fracción decimal.**	A	P
• Se multiplican los numeradores.	A	
• Se multiplican los denominadores.	A	
▪ Se multiplican las fracciones decimales.		P

Por ejemplo, para encontrar los 4/10 de 5/3

3.5.6. F. Comprensión del proceso de conversión de números fraccionarios a fracciones decimales.

Hay que tener en cuenta que las potencias de 10 tienen únicamente a 2 y a 5 como factores primos al realizar el proceso de descomposición al denominador, además, estos factores deben aparecer el mismo número de veces si el número descompuesto es una potencia de 10, por lo tanto, un número que se pueda convertir en una potencia de 10 tendrá únicamente a 2 y a 5 como factores primos, solo que no aparecen el mismo número de veces.

Tabla 12
Verificar si una fracción que no tiene potencias de 10 en el denominador es una fracción decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de **verificar si una fracción que no tiene potencias de 10 en el denominador es una fracción decimal**	A	P
• Determinar si el número se puede convertir en una potencia de 10, es decir, si solo posee como factores primos a 2 y a 5.	A	
▪ Descomponer el denominador de la fracción dada.		P
▪ Si tiene un factor diferente a 2 ó a 5, el número no se puede convertir en una potencia de 10.		P
• Si solo posee como factores primos a 2 y a 5, se realiza el proceso de conversión.	A	
• De los factores obtenidos, sacar las parejas que al multiplicar den 10.	A	
• A los factores que quedan, agregar los factores que faltan para completar los demás factores que conforman la potencia de 10.	A	
• Multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por los factores determinados.	A	
▪ Determinar los factores que hagan falta para que el número se transforme en una potencia de 10.		P

Aquí encontramos otra aplicación del objeto matemático descomposición en factores primos. En este caso este proceso se coordina con otras acciones para hacer la abstracción del proceso que relaciona obtener la base y el exponente de una potencia dada con el proceso de convertir una base dada en una potencia de 10. Mediante este proceso se puede encontrar la menor potencia de 10 asociada a la fracción decimal simplificada.

En este punto se pueden realizar acciones que permitan convertir una fracción cualquiera en una fracción decimal en el caso que sea posible; el estudiante en este momento queda preparado para coordinar mediante el mecanismo de abstracción reflexiva, el proceso de reconocer cuando una fracción es fracción decimal con el proceso que permitirá reconocer cuando una expresión decimal es finita o infinita, o mejor aún, especificar cuándo es un número decimal y cuando es una expresión decimal de un número.

3.5.7. G. Comprensión del concepto de Número decimal.

Ahora entramos en materia de representar las fracciones decimales como una expresión numérica con coma para identificar y comprender los principios que esta notación compone, aquí definiremos las características principales de la notación con coma para luego ampliar la comprensión a través de la comparación con otras formas de expresar los números decimales, principalmente para que tomen forma a partir del concepto de fracciones decimales.

Tabla 13
Acciones y procesos relacionados con la comprensión del concepto de número decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión del concepto de número decimal.	A	P
• Reconocer las partes de una expresión decimal.	A	
• Determinar el valor de posición de la parte entera de una expresión decimal.	A	

• Determinar el valor de posición de la parte decimal de una expresión decimal.	A	
▪ Comprender que un número decimal es la expresión con coma de una fracción decimal.		P
▪ Realizar la lectura de expresiones decimales.		P

3.5.8. Representación de los números decimales en la recta numérica.

Tabla 14
Acciones y procesos para representar los números decimales en la recta numérica.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión para representar los números decimales en la recta numérica.	A	P
• Elegir el rango de las unidades, esta acción es muy útil cuando se van a representar cifras decimales muy pequeñas.	A	
• Elegir el tamaño de las unidades.	A	
• Hacer las divisiones y subdivisiones de la recta.	A	
• Dividir las unidades en 10 partes.	A	
• Dividir cada parte en 10 partes (Esta acción se puede repetir el número de veces que se requiera hasta encontrar el número de partes que indica la última cifra decimal).	A	
▪ Hacer las divisiones y subdivisiones de la recta.		P
• Se cuenta el número de partes que indica la parte entera.	A	
• Se cuenta el número de décimas.	A	
• Se cuenta el número de centésimas (y así sucesivamente hasta el número de partes que se desee representar según las cifras decimales que tenga el número).	A	
▪ Contar el número de partes que indica el número.		P

3.5.9. H. Comprensión de la relación entre una fracción decimal y un número decimal.

Tabla 15
Acciones y procesos para la comprensión de la relación entre una fracción decimal y un número decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de la relación entre una fracción decimal y un número decimal.	A	P
• Escribir el numerador de la fracción.	A	
• Contar la cantidad de ceros que hay en el denominador.	A	
• Separar de derecha a izquierda tantos decimales como ceros tenga la potencia de 10 del denominador y ubicar allí la coma decimal.	A	

• Si el numerador tiene menos cifras que número de ceros en el denominador, se debe completar con ceros a la izquierda para completar y poner la coma.	A	
• Si el número queda con ceros a la izquierda en la parte entera, estos ceros no tienen ningún valor y se pueden retirar de la expresión.	A	
• Si el denominador tiene más ceros que el número de cifras del numerador, se deben agregar ceros a la izquierda para ubicar la coma decimal.		
▪ Convertir una fracción decimal a expresión decimal.		P

Otro método para realizar este proceso de conversión es por el camino de la descomposición polinómica de la fracción decimal, según lo analizado en los referentes de la presente investigación algunos autores, como es el caso de (Godino, Batanero y Cid 2004).

Tabla 16
Acciones y procesos que permiten configurar la transformación de una fracción decimal en forma de expresión decimal con coma.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de la transformación de una fracción decimal en forma de expresión decimal con coma.	A	P
▪ Expresar la fracción decimal en forma polinómica.		
• Escribir los dígitos que corresponden a los factores de las potencias de 10 como la parte entera de la expresión decimal.	A	
• Escribir la coma.	A	
• Escribir los dígitos que corresponden a los numeradores de las fracciones decimales como parte decimal de la expresión decimal.	A	
▪ Convertir una fracción decimal a expresión decimal		P

3.5.10. I. Conversión de un número decimal en una fracción decimal. Fracción Generatriz.

Tabla 17
Proceso para convertir un número decimal a fracción decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión para convertir un número decimal a fracción decimal.	A	P

• Se escriben todas las cifras significativas del número decimal sin la coma, como numerador de la fracción.	A	
• Contar el número de cifras de la parte decimal.	A	
• Escribir en el denominador una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.	A	
• Se eliminan los ceros a la izquierda en el numerador.	A	
▪ Conversión de un número decimal en una fracción decimal.		P

Tabla 18
Conversión de una fracción decimal a número decimal, cuando el numerador es un número decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión para convertir una fracción decimal a número decimal cuando el numerador es un número decimal.	A	P
• Se escribe como numerador las cifras del número decimal sin usar la coma.	A	
• Se cuentan las cifras decimales que tiene el número.	A	
• Se escribe la potencia de 10 en el denominador agregándole tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado.	A	
▪ Convertir la fracción decimal a una que el numerador sea un número natural.		P

En este lugar de la descomposición genética se genera un encapsulamiento de las transformaciones entre las diferentes maneras de expresar un número decimal, debido a la coordinación del proceso de expresión polinómica con los procesos de conversión, entre los cuales se abre la posibilidad al mecanismo de inversión.

3.5.11. J. Porcentajes. Expresión de porcentajes en números decimales.

Tabla 19
Acciones y los procesos determinados para configurar el concepto de porcentaje de un número.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión del concepto de porcentaje de un número.	A	P

• Reconocer el porcentaje como el número de partes que se toma de un todo que está dividido en 100 partes.	A	
• Escribir el número dado en el numerador sin el signo del porcentaje.	A	
• Escribir el número 100 en el denominador.	A	
▪ Convertir la expresión decimal del porcentaje en forma de fracción decimal.		P
• Dividir cada parte en 10 partes (Esta acción se puede repetir el número de veces que se requiera hasta encontrar el número de partes que indica la última cifra decimal).	A	
▪ Hacer las divisiones y subdivisiones de la recta.		P
• Se multiplica el numerador por el número dado.	A	
• Se escribe 100 en el denominador (Equivale a multiplicar 100 por 1)	A	
• Se convierte la fracción decimal en un número decimal.	A	
▪ Multiplicar la fracción decimal por el número al que le deseamos hallar el porcentaje		P
▪ Calcular el tanto por ciento de un número cuando el porcentaje es un número natural.		P

Tabla 20

Proceso para calcular el tanto por ciento de un número cuando el porcentaje es un número decimal.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión del concepto de porcentaje de un número cuando el porcentaje es un número decimal.	A	P
• Reconocer el porcentaje como el número de partes que se toma de un todo que está dividido en 100 partes.	A	
• Escribir el número dado en el numerador sin el signo del porcentaje.	A	
• Escribir el número 100 en el denominador.	A	
▪ Convertir la expresión decimal del porcentaje en forma de fracción decimal.		P
• Se escribe como numerador las cifras del número decimal sin usar la coma.	A	
• Se cuentan las cifras decimales que tiene el número.	A	
• Se escribe la potencia de 10 en el denominador agregándole tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado.	A	
▪ Convertir la fracción decimal a una que el numerador sea un número natural.		P
• Multiplicar la fracción decimal por el número al que le deseamos hallar el porcentaje	A	
▪ Tanto por ciento de un número cuando el porcentaje es un número decimal.		P

En esta parte se induce el producto de números fraccionarios como una acción que permite la comprensión del porcentaje o tanto por ciento de un cierto valor.

3.5.12. K. Comprensión de la expresión polinómica de un número decimal.

La expresión polinómica de un número decimal se propone de tres maneras: en lenguaje natural escrito, una representación con la parte decimal escrita en forma de expresión decimal con coma y otra con la parte decimal escrita en forma de fracción decimal.

Tabla 21
Acciones y procesos para obtener la forma polinómica de la expresión decimal de un número escrita en lenguaje natural.

Descripción de las acciones y procesos para obtener la forma polinómica de la expresión decimal de un número escrita en **lenguaje natural.**	A	P
• Escribir el número de unidades, decenas, centenas, … empezando por las de mayor valor, seguido del número de décimas, centésimas, milésimas	A	
▪ Descomposición en forma polinómica de la expresión decimal de un número escrita en **lenguaje natural.**		P
Descripción de las acciones y procesos para obtener la forma polinómica de la expresión decimal de un número con **expresiones decimales** de la parte decimal.	A	P
• Escribir el valor numérico de unidades, decenas, centenas, …, empezando por las de mayor valor, seguido del valor numérico de décimas, centésimas, milésimas, …, en forma de números decimales.	A	
▪ Descomposición forma polinómica de la expresión decimal de un número con **expresiones decimales** de la parte decimal.		P
Descripción de las acciones y procesos para obtener la forma polinómica de la expresión decimal de un número usando **fracciones decimales** en la parte decimal.	A	P
• Escribir el valor numérico de unidades, decenas, centenas, … , expresadas como producto de potencias de 10, empezando por las de mayor valor, seguido del valor numérico de décimas, centésimas, milésimas, …, en forma de fracciones decimales.	A	
• Escribir el valor numérico de unidades, decenas, centenas, … , empezando por las de mayor valor, seguido del valor numérico de décimas, centésimas, milésimas, …, en forma de fracciones decimales en forma de potencias.	A	
▪ Descomposición forma polinómica de la expresión decimal de un número usando **fracciones decimales** en la parte decimal.		P

3.5.13. L. Comprensión de diferentes representaciones de equivalencia de números decimales.

Es muy útil para abstracciones mentales de comparación comprender que al agregar ceros a la izquierda de la parte entera y al agregar ceros a la derecha de la parte decimal, el valor del número decimal no cambia; eso implica que puede haber infinitas representaciones de un mismo número decimal aplicando esta pequeña convención.

- Agregar ceros a la izquierda de la parte entera. **(Acción)**
- Agregar ceros a la derecha de la parte decimal. **(Acción)**

3.5.14. M. Comparación y orden de expresiones decimales.

Atendiendo a estrategias de carácter lexicográfico las acciones y procesos que configuran la comparación y el orden de dos expresiones decimales son las siguientes:

Tabla 22
Acciones y procesos para obtener comprensión de comparación y el orden de dos expresiones decimales.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de comparación y el orden de dos expresiones decimales.	A	P
• Ubicar los números uno debajo del otro de manera que coincida el valor posicional de sus dígitos.	A	
◦ Cuando los números tienen diferente número de cifras en la parte entera:	A	
• El número que tenga mayor número de cifras en la parte entera es mayor.	A	
◦ Cuando los números tienen igual número de cifras en la parte entera y en la parte decimal:	A	
• Se comparan una a una las cifras de mayor a menor valor de posición, de izquierda a derecha.	A	

• En este orden donde haya cifras diferentes, se considera mayor el número que tenga un mayor valor en esta posición.	A	
◦ Cuando los números tienen igual número de cifras en la parte entera y diferente número de cifras en la parte decimal:	A	
• Se le agregan ceros a la expresión que tenga menos cifras después de la coma de manera que ambos números queden con igual número de cifras decimales.	A	
• Se comparan de izquierda a derecha las cifras de la parte decimal, en este orden donde haya cifras diferentes, se considera mayor el número que tenga un mayor valor en esta posición.	A	
▪ Comparación y orden de expresiones decimales.		P

Una vez interiorizado este conjunto de acciones, abren la puerta de entrada para comprensión de nuevos conceptos, motivo por el cual se enlazan la descomposición, la equivalencia y el orden de expresiones y números decimales con el concepto de densidad. en este sentido se referencia una conclusión obtenida por (Konic 2011). “La comparación es el procedimiento que subyace a una de las propiedades más importantes en la construcción de los conjuntos numéricos: la densidad”. (p. 161)

3.5.15. N. Comprensión de la propiedad de densidad.

Tabla 23
Acciones y procesos que permiten encapsular como un objeto el concepto de densidad.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión del concepto de densidad.	A	P
• Al agregar un cero al número decimal dado encuentra 9 opciones para elegir sucesores.	A	
• Al agregar dos ceros al número decimal dado encuentra 99 opciones para elegir sucesores más próximos.	A	
• Se pueden agregar infinitos ceros al número decimal dado, encontrando de esta manera infinitos sucesores cada vez más próximos a cualquier número decimal dado.	A	
▪ Determinar que hay infinitas opciones para encontrar el sucesor de un número decimal.		P

• Al restar 1 a la última cifra y agregar un 9, encuentra un antecesor.	A	
• Al restar 1 a la última cifra y agregar 99, encuentra un antecesor más próximo.	A	
• Se pueden agregar infinitos nueves al número decimal dado, encontrando de esta manera infinitos antecesores cada vez más próximos a cualquier número decimal dado.	A	
▪ Determinar que hay infinitas opciones para encontrar el antecesor de un número decimal.		P
▪ Comprende que entre dos números decimales siempre es posible incorporar otro decimal.		P

Haciendo estos procesos el estudiante llega a comprender que una expresión decimal no tiene antecesor ni sucesor ya que siempre se puede encontrar un número después de un antecesor y antes de un sucesor. **(Objeto)**

3.5.16. O. Uso de expresiones decimales en las Unidades Métricas de Longitud.

Tabla 24

Acciones y procesos que acompañarán los mecanismos de abstracción reflexiva para la comprensión de las Unidades Métricas de Longitud.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión de Unidades Métricas de Longitud.	A	P
• Reconocer el valor de los múltiplos y submúltiplos del metro.	A	
• Expresar las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de fracciones decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro.	A	
▪ Descomponer las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de fracciones decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro.		P
▪ Expresar las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de números decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro.		P
▪ Descomponer las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de números decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro.		P
▪ Convertir magnitudes métricas expresadas en forma de número decimal a fracción decimal.		P
▪ Expresar magnitudes métricas de lenguaje natural a fracción decimal.		P
▪ Expresar magnitudes métricas del lenguaje natural a número decimal.		P
▪ Convertir magnitudes métricas tomando como una unidad de referencia a otra unidad de medida.		P

▪ Reconocer magnitudes equivalentes que están expresadas en unidades diferentes.		P
• Convertir las magnitudes tomando una unidad como referencia.	A	
Comparar los valores para determinar si son iguales.	A	
▪ Comparar y ordenar medidas que están expresadas en unidades diferentes.		P
▪ Reconocer magnitudes equivalentes que están expresadas en unidades diferentes.		P
▪ Determinar cuál magnitud es mayor menor o igual a otras magnitudes.		P

3.5.17. P. Comprensión de la fracción como cociente. Transformación de cocientes a expresiones decimales.

Aplicar el algoritmo de la división entera entre el numerador y el denominador para obtener una expresión con coma, consiste en realizar la división entera, y cuando se terminen de bajar las cifras del dividendo, se pone la coma en el cociente y se agregan ceros en el residuo hasta que la división termine. No todas las divisiones son exactas, cuando se identifique un número o varios que se repiten en ciclos, se puede escribir un solo ciclo en la parte decimal con una línea encima.

Tabla 25
Acciones y procesos que configuran la comprensión del procedimiento para obtener números decimales a partir de la división.

Descripción de las acciones y procesos para obtener comprensión para obtener números decimales a partir de la división.	A	P
• Se escribe la fracción en forma de división.	A	
• Se dividen los números como si fueran números naturales (Algoritmo de la división).	A	
• Cuando se termina la división de naturales, se pone coma en el cociente y se agregan ceros en los restos para seguir dividiendo.	A	
• Cuando el numerador es menor que el denominador, se pone “0,” (cero coma) en el cociente y se agregan ceros en los restos para seguir dividiendo.	A	
• La división termina cuando el residuo se hace cero.	A	
• Si la división no termina se eligen las cifras decimales que se deseen.	A	
▪ Hallar una expresión decimal a partir de un número fraccionario mediante el algoritmo de la división.		P

3.5.18. Q. Comprensión de conversión de una fracción a expresión decimal finita.

Para obtener un número decimal a partir de una fracción se pueden realizar tres procesos:

Descripción de las acciones y procesos para obtener un número decimal a partir de una fracción.	A	P
◦ Si la fracción es decimal		
▪ Realizar el proceso de conversión de fracción decimal a número decimal.		P
◦ Si la fracción representante de una fracción decimal no tiene como denominador una potencia de 10. (Método 1)		
▪ Convertir la fracción representante a una fracción decimal.		P
▪ Realizar el proceso de conversión de fracción decimal a número decimal.		P
◦ Si la fracción representante de una fracción decimal no tiene como denominador una potencia de 10. (Método 2)		
▪ Realizar la división del numerador entre el denominador.		P

3.5.19. R. Comprensión de expresión decimal infinita periódica.

Tabla 26

Procedimiento para obtener expresiones decimales infinitas periódicas a partir de una fracción.

Descripción de las acciones y procesos para obtener expresiones decimales infinitas periódicas a partir de una fracción.	A	P
• Dividir una fracción que no sea decimal.	A	
• Agregar ceros para encontrar más cifras decimales.	A	
• Seguir hallando cifras decimales hasta encontrar un periodo.	A	
▪ Obtener expresiones decimales infinitas periódicas a partir de una fracción.		P

Tabla 27

Procedimiento para reconocer si una expresión generada por una fracción es una expresión decimal pura o mixta.

Descripción de las acciones y procesos para reconocer si una expresión generada por una fracción es una expresión decimal pura o mixta.	A	P
• Determinar si uno o varios dígitos se repiten infinitamente después de la coma, a estos números se les llama periodo.	A	

• Si el periodo se repite inmediatamente después de la coma, el número es un decimal periódico puro.	A
▪ Reconocer si una expresión generada por una fracción es una expresión decimal pura o mixta.	P

Si después de la coma, hay cifras antes del periodo, el número es un decimal periódico mixto.

3.5.20. S. Comprensión de expresión decimal periódica pura.

Una expresión decimal periódica se dice que es pura cuando uno o varios dígitos de la parte decimal se repiten infinitamente inmediatamente después de la coma.

3.5.21. T. Comprensión de expresión decimal periódica mixta.

Una expresión decimal periódica se dice que es mixta cuando hay uno o varios dígitos después de la coma que no hacen parte de los dígitos que se repiten infinitamente.

3.5.22. U. Fracción generatriz de los racionales representados por expresiones periódicas puras.

La expresión generatriz de una expresión decimal es aquella que al dividir el numerador entre el denominador la genera. Esto aplica tanto para las expresiones que generan los números decimales como para las que no. Basado en los procedimientos se realiza la siguiente propuesta procedimental atendiendo a las necesidades didácticas del nivel de enseñanza.

Tabla 28

Proceso para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura.

Descripción de las acciones y procesos para obtener la fracción generatriz de los racionales representados por expresiones periódicas puras.	A	P
• Formar una potencia de 10 con el número de ceros igual al número de cifras en la parte decimal.	A	
• Restar 1 a la potencia.	A	
▪ Encontrar el denominador de la fracción generatriz.		P
• Determinar el número natural que se forma con todas las cifras de la parte entera y la parte decimal.	A	
• Determinar el número natural que se forma con las cifras de la parte entera.	A	
• Restar estos dos números.	A	
▪ Encontrar el numerador de la fracción generatriz.		P

3.5.23. V. Fracción generatriz de los racionales representados por expresiones periódicas mixtas.

De igual manera, basado en el anterior procedimiento se realiza la siguiente propuesta procedimental atendiendo a las necesidades didácticas del nivel de enseñanza.

Tabla 29

Proceso para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta.

Descripción de las acciones y procesos para obtener la fracción generatriz de los racionales representados por expresiones periódicas mixtas.	A	P
• Formar una potencia de 10 con el número de ceros igual al número de cifras en la parte decimal.	A	
• Formar una potencia de 10 con el número de ceros igual al número de cifras de la parte decimal que no hacen parte del periodo.	A	
• Restar estas dos cifras.		
▪ Encontrar el denominador de la fracción generatriz.		P
• Determinar el número natural que se forma con todas las cifras de la parte entera y la parte decimal.	A	
• Determinar el número natural que se forma con las cifras de la parte entera y de la parte decimal sin el periodo.	A	
• Restar estos dos números.	A	
▪ Encontrar el numerador de la fracción generatriz.		P

3.5.34. W. Comprensión de redondeo o aproximación de expresiones decimales de un número

Tabla 30

Proceso para hacer el redondeo de expresiones decimales.

Descripción de las acciones y procesos para hacer el redondeo de expresiones decimales.	A	P
• Cuando el dígito siguiente es 0, 1, 2, 3, 4, se deja la cifra hasta la cual se desea truncar el número.	A	
• Cuando el dígito siguiente es 6, 7, 8, 9, se aumenta 1 a la cifra hasta la cual se desea truncar el número.	A	
• Cuando el número siguiente es 5, se mira la cifra que le precede y se realiza uno de los pasos anteriores según sea el caso.	A	

El hecho que hace a los números decimales útiles es que permiten “aproximar” con el grado de precisión que deseemos a cualquier número racional. Para ello basta truncar la serie ilimitada de la expresión decimal periódica en un punto más o menos alejado a la derecha de la coma; de este modo se obtiene un decimal finito que aproxima al decimal infinito cuanto queramos.

3.5.25. X. Irracionales. Comprensión de expresión decimal infinita no periódica. Número no decimal.

Un **número irracional** es un **número** que no se puede escribir en fracción, la parte decimal sigue para siempre sin repetir ningún periodo. Son números que no se obtienen a partir de los números fraccionarios, algunos de ellos surgen de otras operaciones como por ejemplo la radicación.

3.6. Propuesta Metodológica para el ciclo ACE

Podemos observar que en el marco de la teoría APOE aplicamos el ciclo ACE para cimentar las bases del concepto de número decimal con objetos matemáticos que son saberes previos y necesarios para su construcción. Con este propósito debemos implementar una secuencia didáctica que permita encajar todos los conceptos en un engranaje sólido como se muestra a continuación:

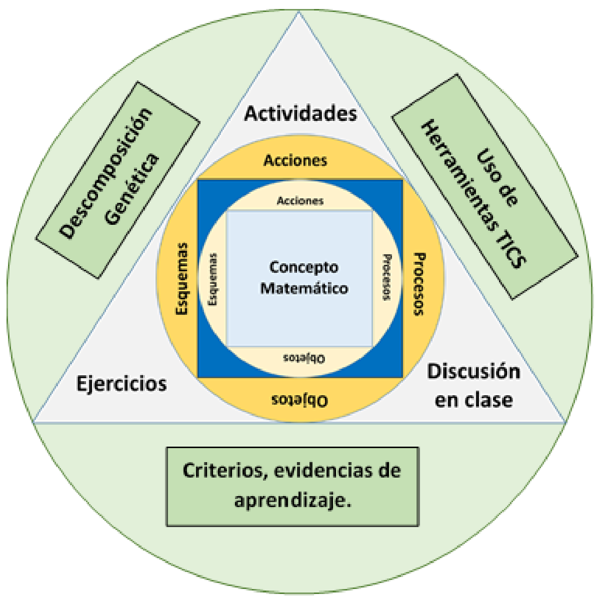


Figura 8: Ciclo ACE como herramienta de enseñanza de la teoría APOE. Adaptado de Rodriguez A, 2014. Elaboración propia

En lo que concierne a las enseñanzas planteadas a partir de la descomposición genética, cada una de las clases fue grabada en video y fue desarrollada con los estudiantes por medio de presentaciones en power point y con materiales didácticos, para esto se desarrollan clases basadas en el socioconstructivismo como modelo pedagógico, el aprendizaje basado en problemas (ABP) como teoría del aprendizaje y la teoría APOE como herramienta para la didáctica de las clases (Ver Anexo K en CD).

Secuencia Didáctica ACE diseñada para la implementación de la relación entre un tratamiento instruccional de aula y la Descomposición Genética del concepto de número fraccionario como parte-todo del análisis teórico.

Tabla 31
Muestra de Secuencia Didáctica ACE

Actividades en el experimento Elementos básicos de Fraccionarios	**Elemento asociado Teoría APOE**
Hipo y sus amigos necesitan encerrar a sus 42 dragones en jaulas para poder alimentarlos, pero no confía mucho en las habilidades de sus amigos Brutilda y Brutacio, quienes le acompañan el día de hoy. Así que decidió que él solo se iba a encargar de encerrar a 18 dragones, del resto se encargarán sus amigos en partes iguales, y para no hacerlo de uno en uno propuso que se dividieran los dragones en grupos. Brutilda después de discutir con su hermano dice que los pueden repartir en grupos de a 5, pero Hipo sospecha que se pueden dividir en grupos de a 6 o de a 7. ¿Cuál será la manera más adecuada de dividir los dragones para repartirlos en la proporción que Hipo lo propuso? ¿Cuántos grupos le corresponde a cada uno? ¿Cómo se puede expresar esta cantidad usando los números fraccionarios? 	Dividir 42 semillas en subconjuntos de manera que se cumpla las condiciones que propone Hipo. **Acción.** **Abstracción reflexiva→ Interiorización:** El estudiante reflexiona sobre el número de dragones que debe tener cada grupo de manera que se puedan repartir de manera exacta. **Abstracción reflexiva→ coordinación:** El estudiante sabe que se deben dividir en 6 o 7 porque son múltiplos de 42 mientras que 5 no lo es, y efectúa el reparto por grupos sin hacer uso de las semillas. **Proceso.** **Abstracción reflexiva→ Encapsulación:** Realiza las operaciones adecuadas para encontrar relaciones entre los grupos y el número de total de dragones y efectúa el reparto por grupos reconociendo la fracción que le corresponde a cada uno. **(Objeto)**

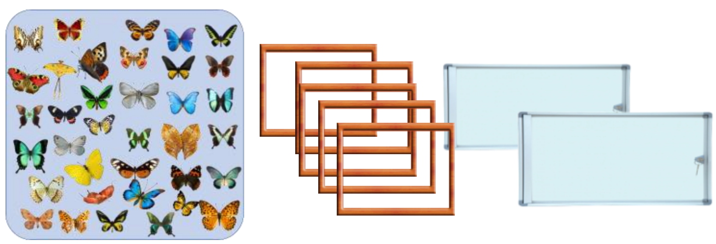
Con un hilo y una mariposa, se pueden hacer mil cosas.

En un mariposario se requieren exponer 36 especies de mariposas en cuadros y vitrinas de tal manera que no quede ninguna por fuera. Si en cada cuadro solo caben 4 mariposas. ¿cómo se pueden organizar las mariposas si hay 5 cuadros y 2 vitrinas?

¿Qué fracción de las mariposas que se van a exponer representa cada cuadro?

¿Qué fracción de las mariposas se van a exponer en todos los cuadros?

¿Qué fracción de las mariposas que se van a exponer representa cada vitrina?



Abstracción reflexiva→ Interiorización: El estudiante reflexiona sobre la manera de distribuir la mariposa, el número de mariposas que debe ir en los cuadros y en las vitrinas de manera que no quede ninguna por fuera de la exposición con las condiciones dadas.

Abstracción reflexiva→ coordinación: El estudiante reconoce por qué no se puede distribuir de otra manera, y lo que sucede con las mariposas que sobran; en cada vitrina se pueden exponer 8 mariposas pero no representa una fracción del total de mariposas.

Proceso.

¿Qué es un Compás?

El compás es la división del pentagrama en partes de igual duración o igual suma de valores. Los valores de las notas musicales son fracciones de la unidad. Vamos a escribir las unidades según lo indican los compases. ¿Teniendo en cuenta la siguiente información, de cuantas maneras puedes armar un compás de $\frac{4}{4}$?

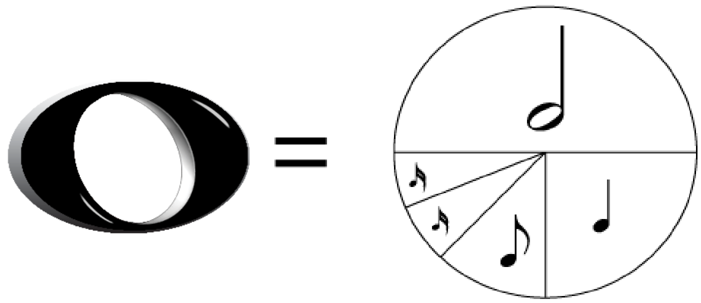
𝅝	$\frac{4}{4} = 1$	Redonda
𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	Blanca
♩	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	Negra
♪	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$	Corchea
𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$	Semicorchea

Acción: Dividir la unidad en casillas equivalentes.

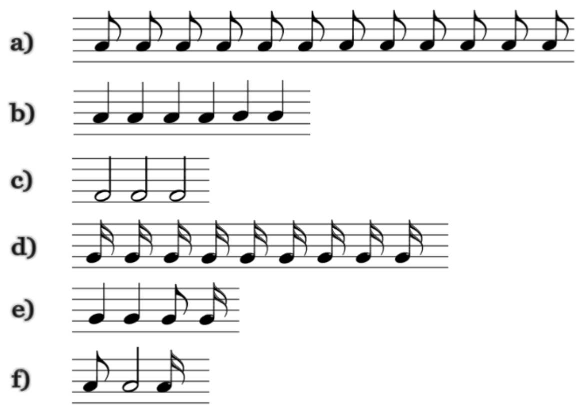
Abstracción reflexiva→ Interiorización: El estudiante reflexiona sobre el número de notas que se pueden poner según su valor de manera que se puedan completar los compases.

Abstracción reflexiva→ coordinación: El estudiante coordina los valores de las fracciones con los símbolos de las notas musicales y puede determinar un valor fraccionario usando la representación de las notas musicales. **Proceso.**

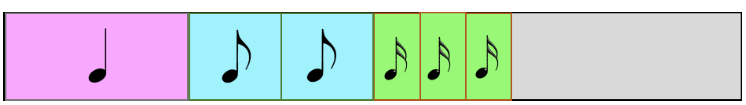
Abstracción reflexiva→ encapsulación: El estudiante construye compases evocando el valor de las notas musicales sin realizar las operaciones entre fracciones. **Objeto.**

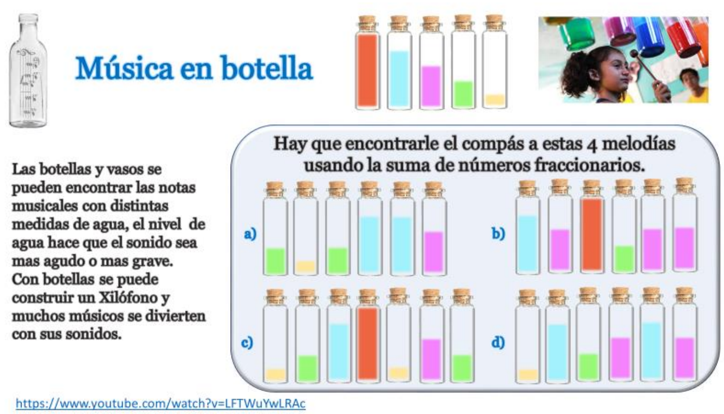


Representar de manera gráfica los siguientes conjuntos de notas:



Ejemplo: Graficar la siguiente composición.





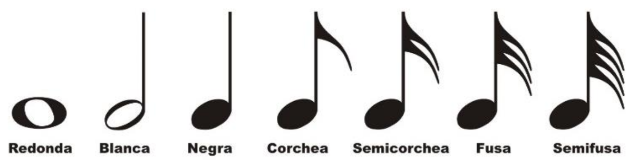
¿Cuál es el valor de cada una de las botellas?
¿Qué pasaría si hubiera una o varias botellas con una proporción de la unidad diferente?

Acción: Dividir la unidad en casillas con diferente medida. **Abstracción reflexiva→ Interiorización:** El estudiante reflexiona sobre el número de notas que se pueden poner según su valor de manera que se encuentren equivalencias. **Abstracción reflexiva→ coordinación:** El estudiante coordina los valores de las fracciones con los símbolos de las notas musicales y puede determinar equivalencias usando la representación de las notas musicales. **Proceso.** **Abstracción reflexiva→ encapsulación:** El estudiante resuelve las preguntas comprendiendo que el mismo valor de las notas se puede expresar amplificando el valor de la fracción.

Acción: Encontrar el valor de cada una de las botellas. **Abstracción reflexiva→ Interiorización:** El estudiante reflexiona sobre el valor de las 5 notas que hay en las botellas. **Abstracción reflexiva→ coordinación:** El estudiante coordina los valores de las fracciones con las cantidades de líquido de las botellas y puede determinar el valor de un conjunto de botellas usando la representación de las notas musicales y los números fraccionarios. **Proceso.**

Abstracción reflexiva→ encapsulación: El estudiante resuelve las preguntas y predice el valor total de las melodías. **Objeto.**

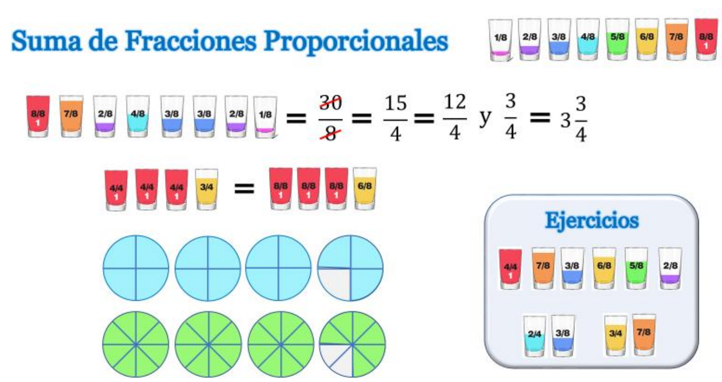
Teniendo en cuenta la siguiente información responde las siguientes preguntas.



¿Cuántas corcheas forman el tiempo de una blanca?
¿Cuántas fusas conforman el tiempo de una negra?
¿Cuántas semicorcheas forman el tiempo de una blanca?
¿Cuántas semifusas forman el tiempo de una negra?
¿Cuántas semifusas se necesitan para formar una redonda?

¿Se puede hacer el procedimiento anterior de manera matemática?
¿Cómo se haría?
¿Qué sucede con las notas al amplificar su valor?

Acción: Dividir la unidad en casillas con diferente medida.
Abstracción reflexiva→ Interiorización: El estudiante reflexiona sobre el número de notas que se pueden poner según su valor de manera que se puedan completar los compases.
Abstracción reflexiva→ coordinación: El estudiante coordina los valores de las fracciones con los símbolos de las notas musicales y puede determinar un valor fraccionario usando la representación de las notas musicales. **Proceso.**
Abstracción reflexiva→ encapsulación: El estudiante resuelve las preguntas comprendiendo que el mismo valor de las notas se puede expresar amplificando el valor de la fracción.



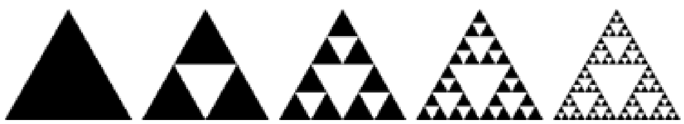
Preguntas para realizar durante la actividad.
¿Cuántos vasos como mínimo se necesitarían para contener todo el líquido?
¿Cuántos vasos estarían totalmente llenos?
¿Si queda un vaso sin llenar, qué cantidad de líquido tendría?

Acción: Sumar cantidades fraccionarias y simplificarlas.
Abstracción reflexiva→ Interiorización: El estudiante suma las cantidades propuestas en los vasos, y reflexiona sobre la cantidad mínima de vasos que se requieren para representar dicha cantidad.
Abstracción reflexiva→ coordinación: El estudiante coordina los valores de las fracciones con las cantidades que hay en los vasos y puede conocer la respuesta reuniendo sus valores, además el ejercicio invita a que coordine con fracciones de diferente denominador. **Proceso.**

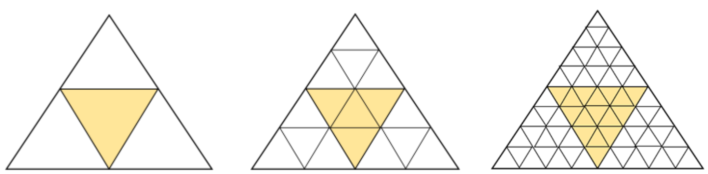
¿De cuantas formas se puede escribir un número fraccionario que represente esta cantidad?

Abstracción reflexiva→ encapsulación: El estudiante resuelve las preguntas comprendiendo que el mismo valor se puede expresar amplificando la fracción. **Objeto.**

Fractales:
Un fractal es un objeto cuya estructura se repite a diferentes escalas. Si dibujamos un triángulo blanco dentro de uno negro como se muestra en la figura, y repetimos este proceso varias veces obtenemos un fractal.



Si tomamos el triángulo del centro como se muestra en la figura:



1. ¿Cuál es la fracción que representa cada triángulo?
2. ¿La parte amarilla es diferente en cada triángulo?
3. ¿Representa la misma cantidad?
4. ¿Por qué los números son diferentes?
5. ¿Si seguimos dividiendo los triángulos de esta manera, ¿cuáles serían las fracciones que representan esta misma porción?
6. ¿Qué operación se realiza a cada fracción para obtener la siguiente?
7. ¿Cuántas veces se puede hacer este proceso?

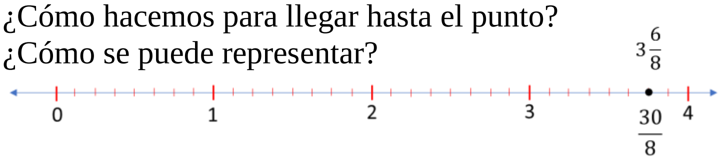
Acción: Representar las fracciones de los triángulos allí representados.
Abstracción reflexiva→ Interiorización: El estudiante reconoce la manera como se están dividiendo las figuras, y reflexiona sobre la cantidad de triángulos que se generan cada vez que se dividen.
Abstracción reflexiva→ coordinación: El estudiante coordina los valores de las fracciones y la manera como se va aumentando los números que representan la misma porción del triángulo e identifica el factor que las amplifica. **Proceso.**
Abstracción reflexiva→ encapsulación: El estudiante resuelve las preguntas comprendiendo que este proceso se puede realizar infinitamente y que la misma proporción del triángulo central se puede expresar amplificando la fracción.

Inventando medidas:
¿Existe una manera de medir de manera lineal las cantidades?
¿Cómo podríamos medir cantidades que se dividen en partes usando una línea?

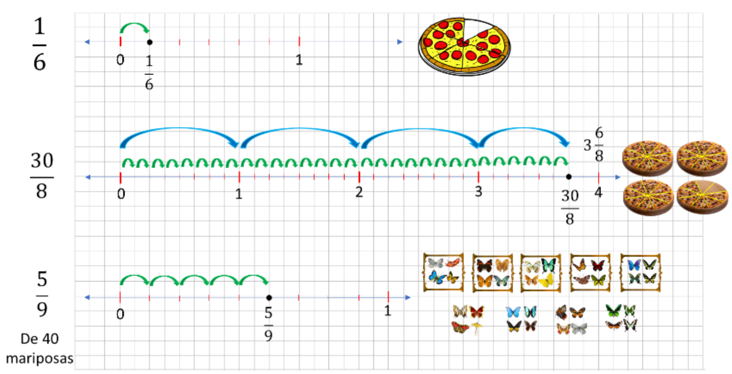
¿Se puede dividir en partes?
¿Cómo deben ser estas partes, pueden ser diferentes?
¿Podemos usar divisiones y subdivisiones?

¿Desde dónde empezamos a medir?
¿Cómo contamos las partes grandes y las pequeñas?

¿Cómo hacemos para llegar hasta el punto?
¿Cómo se puede representar?



Representación de cantidades en la recta numérica



Acción: Dibujar la recta, dividirla en unidades, y las unidades dividirlas en partes. **Abstracción reflexiva→ Interiorización:** El estudiante reconoce que la recta debe guardar una proporción entre las unidades y sus partes. **Abstracción reflexiva→ coordinación:** El estudiante coordina los valores de las fracciones y la manera como se debe dividir la recta, de manera que se pueda representar una medida que guarde proporciones entre las unidades y sus partes. **Proceso. Abstracción reflexiva→ encapsulación:** El estudiante representa las fracciones y se apoya en la recta para concluir que fracciones representan una mayor o menor cantidad de partes de un todo.

3.7. Diseño aplicación y análisis de prueba

3.7.1. Diseño de la prueba

Las preguntas han sido elegidas teniendo en cuenta el tiempo para la prueba, el análisis teórico de los textos, los antecedentes mencionados y la descomposición genética planteada para medir la comprensión del concepto de número decimal, también teniendo en cuenta el nivel de enseñanza en el que se encuentran los estudiantes, las condiciones y características ecológicas del entorno. Después de haber realizado un banco de preguntas y analizar el contenido de cada una de estas se plantea el instrumento de medida (Ver Anexo L en CD).

3.7.2. Población:

La población a la cual se le realiza la prueba pertenece a lugares aledaños al corregimiento de La Florida; zona rural del municipio de Pereira, departamento de Risaralda-Colombia. A la Institución Educativa Héctor Ángel Arcila asisten niños de veredas aledañas y son hijos de personas que en su mayoría se dedican a trabajar la tierra, estos estudiantes han recibido educación primaria en aulas en las que un docente brinda las enseñanzas de todas las asignaturas por grado. Según manifiestan los niños y sus padres de familia, los docentes que han tenido, en su mayoría, tienen formación como Bachilleres Normalistas y algunos son licenciados en pedagogía infantil. Algunos de los estudiantes presentan dificultades para el aprendizaje, motivo por el cual se les debe hacer adecuaciones curriculares; otros niños presentan barreras de aprendizaje (o sea dificultades de carácter actitudinal), una de estas barreras es la poca asistencia a las clases, otra parte de la población presenta mejor capacidad académica y comportamental, por este motivo los datos obtenidos en la prueba presenten diferencias sustanciales. La prueba se aplicó a todos los estudiantes de los tres cursos: 6A, 6B y 6C, cada uno con 18, 23 y 18 estudiantes respectivamente, cuyas edades oscilan entre los 10 y los 14 años.

3.7.3. Aplicación y análisis de validez del cuestionario de prueba

La prueba piloto fue realizada a dos de los tres grupos que hacen parte de la población de la institución educativa donde se realiza la investigación: 6A y 6C. Como la población es cerrada, es decir, en la presente investigación la población sobre la cual se debe hacer la investigación es la institución educativa donde me encuentro laborando actualmente según los lineamientos y directrices del Ministerio de Educación Nacional para aspirar al título de Magister. La prueba piloto se realizó con la ayuda de los dos docentes de la institución que hacen parte del área de matemáticas, ambos profesionales en áreas afines con las matemáticas, con amplia experiencia en el campo de la enseñanza y conocedores de la población.

Dado que inicialmente se realizará un análisis de carácter cuantitativo de los datos, cada uno de los ítems será valorado de manera dicotómica de la siguiente manera:

- Valor 0: Para los ítems que presenten respuestas incorrectas.
- Valor 1: Para los ítems que presenten respuestas correctas.

Después de aplicar el cuestionario piloto a una muestra de sujetos representativa de la población a la que va dirigida la prueba, las respuestas de cada individuo son consignadas en una matriz de datos de sujetos x ítems, mostrando inicialmente los resultados por grupo. La tabla recoge las respuestas de una muestra de 36 estudiantes a un test formado por 30 preguntas con opciones de respuesta, de las cuales se derivan 68 ítems dicotómicos en las que 1 indica acierto y 0 error (Ver Anexo M en CD).

Este cuadro nos permite evidenciar un poco las respuesta sobre cada ítem de la población y también como se conjugan los diferentes elementos para la construcción de un esquema de pensamiento, en realidad todo el conjunto de elementos inmersos en los conceptos son un organismo vivo de el objeto de conocimiento presentado y analizado en la investigación, lo que nos falta en este momento es poder evidenciar el impacto sobre las construcciones mentales del estudiante y determinar si el orden planteado permite la construcción del esquema de número decimal.

3.7.3.1. Análisis de ítems

Las preguntas se han formulado de manera lógica y se han dividido por ítems para que midan el conocimiento que los estudiantes tienen sobre el concepto de número decimal. A continuación, vamos a estudiar el grado en que cada ítem es un "buen medidor" del concepto haciendo uso de la estadística, para ello vamos a obtener cuatro indicadores, a saber:

a. El índice de validez.
b. El índice de dificultad.
c. El índice de homogeneidad.
d. El índice de fiabilidad.

3.7.3.2. Validez de contenido

La validez de un instrumento se refiere al grado en que el instrumento mide aquello que pretende medir; con este propósito vamos a hacer una revisión de los contenidos por parte de expertos, la relación que tienen los ítems entre sí y éstos a su vez con el contenido.

3.7.3.3. Revisión del cuestionario por parte de expertos.

Se realizó la consulta en el interior de la institución educativa donde se está llevando a cabo el presente trabajo con 2 colegas, dado que ellos tienen conocimiento de las características de la población en cuanto a su formación en aptitudes matemáticas, el análisis se realizó a modo de reunión por separado, a los docentes se les brindó la información pertinente al trabajo de investigación tales como los objetivos, la descomposición genética, la secuencia ACE y la manera como se pretende lograr establecer si los estudiantes conocen los elementos del concepto de número decimal y cómo realizan ellos la construcción del concepto según el propósito de la presente investigación. Los docentes hicieron propuestas en torno a la adecuación del cuestionario las cuales fueron según sus criterios encaminadas a:

- Disminuir el tiempo que necesitan los estudiantes para responder la prueba.
- Eliminar preguntas cuyos elementos ya estén inmersos en otros ítems del cuestionario.
- Modificar la estructura de la pregunta en caso de que se requiera.
- Que no se pierda la correlación existente entre cada una de las preguntas.

Después de la revisión se propusieron y aprobaron las siguientes modificaciones:

Se realiza una modificación reduciendo las filas de la tabla de 3 a 2 ya que no es necesario aumentar el número de ítems para saber si reconoce el valor de posición de los dígitos que componen el número. La pregunta 7 se elimina del cuestionario ya que está contenido en el ítem 9, en la pregunta 8 se decide reducir la tabla a solo dos ítems.

Dado que el propósito es reducir el tiempo de la prueba y el ítem es fácil por lo tanto no altera mucho el índice de correlación.

Se retira el punto 13 de la prueba debido a que el concepto de orden se presenta en el punto 12, y se decide eliminar la pregunta 22 debido a que se considera que el punto anterior contiene los elementos que se necesitan para evaluar la comprensión de este proceso y también para reducir el tiempo de la prueba, el propósito es evitar el agotamiento de los estudiantes. (Ver Anexo N en CD)

3.7.3.4. Contenido de los ítems del cuestionario según los elementos tenidos en cuenta en la descomposición genética.

Para dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas en el cuestionario, el estudiante tendrá que demostrar que ha comprendido los elementos que contiene cada pregunta, en la tabla (Ver Anexo O en CD) podemos notar que cada pregunta combina elementos para la construcción de la comprensión del concepto de número decimal de manera diferente, la elección de preguntas ha sido cuidadosa ya que se debe evitar el agotamiento de los estudiantes y teniendo en cuenta que los estudiantes de la institución educativa donde se realiza la investigación presentan pocas bases en competencias matemáticas debido a que la población es rural, la mayoría de los estudiantes provienen de veredas y en su mayoría han recibido instrucción matemática de docentes que no tienen formación en el área según lo descrito en el parágrafo de la educación rural en Colombia.

3.7.3.5. Índice de dificultad

Este primer indicador que vamos a analizar nos servirá para cuantificar el grado de dificultad de cada cuestión. El índice de dificultad de un ítem j se define como el cociente entre el nº de sujetos que lo han acertado (Aj) y el nº total de sujetos que lo han intentado resolver (Nj), Dj = Aj / Nj

Según la manera en que han sido consignado los datos en la matriz de respuestas a los ítems por estudiante, el índice de dificultad de un ítem lo hallamos mediante el cociente entre el nº de unos y el total de estudiantes.

Con los resultados obtenidos podemos revisar varios aspectos de la interpretación de Dj:

- Cuando el valor de Dj se acerca a 0, esto indica que el ítem ha sido muy difícil de responder; si se acerca a 1, indica que el ítem ha sido muy fácil; y si se acerca a 0,5, es porque no ha sido ni fácil ni difícil para el estudiante dar una respuesta.
- Cuando el valor de Dj es 0 ó 1, la varianza del ítem es cero; cuando Dj se acerca a 0,5, la varianza del ítem aumenta.

Los ítems que tienen Dj = 0 o Dj = 1 no aportan mucho a la prueba, ya que no discriminaría entre los diferentes sujetos de la población a la que se le presentó la prueba. Un cuestionario debe tener tanto ítems fáciles como difíciles, sin embargo, debe haber más ítems con dificultad media.

Podemos observar que el índice de dificultad presenta valores diferentes para ambos grados, esto sucede debido a que en el grado 6A hay más estudiantes con barreras y dificultades del aprendizaje que en el grado 6C, los cuales son en número 13 y 8 respectivamente; los estudiantes que presentan dificultades para el aprendizaje en estos grupos han sido discriminados en las tablas de resultados con color azul.

Tabla 32
Número de Ítems que pertenecen a los intervalos de los Índices de Dificultad.

Grado 6A		Grado 6C		Toda la Muestra	
Dj	**N° de ítems**	**Dj**	**N° de ítems**	**Dj**	**N° de ítems**
$Dj = 0$	2	$Dj = 0$	1	$Dj = 0$	0
$Dj > 0 \wedge Dj < 0.3$	22	$Dj > 0 \wedge Dj < 0.3$	12	$Dj > 0 \wedge Dj < 0.3$	15
$Dj > 0{,}3 \wedge Dj < 0{,}70$	28	$Dj > 0{,}3 \wedge Dj < 0{,}70$	39	$Dj > 0{,}3 \wedge Dj < 0{,}70$	40
$Dj > 0.7 \wedge Dj < 1$	13	$Dj > 0.7 \wedge Dj < 1$	16	$Dj > 0.7 \wedge Dj < 1$	13
$Dj = 1$	3	$Dj = 1$	0	$Dj = 1$	0

Se muestra en la tabla cómo varía el número de ítems que pertenecen a los intervalos de dificultad cuando se parcializan por grados y cuando se toma toda la muestra.

3.7.3.6. Índice de homogeneidad

El índice de homogeneidad, llamado a veces índice de discriminación, de un ítem (Hj) se define como la correlación de Pearson entre las puntuaciones de los N sujetos en el ítem j y las puntuaciones X en el total del test: Hj= rjx

Según la disposición de la matriz de datos, para obtener los Hj de los ítems, debemos calcular la correlación entre las columnas de los estudiantes y la columna de puntuaciones totales en la prueba.

Podemos observar (Ver Anexo P en CD) que en el grado 6A hay 34 ítems que presentan un valor Hj inferior a 0,5 y en ambos grupos se refleja un Hj inferior a 0,5 en 30 ítems afectando la correlación de 4 ítems con la prueba. Sin embargo, el problema que se genera aquí no es ese, y se comprueba lo planteado por Konic 2011 cuando hace referencia a lo que ocurre con un cuestionario que ha sido diseñado para cubrir una amplia gama de contenidos: “Mientras que un test unidimensional es muy fiable, podría tener menor validez o cubrir una gama muy estrecha de contenidos. Por ello se tomará un contenido más amplio, incluso cuando la fiabilidad podría ser menor (p. 111)

En la siguiente tabla se muestran los índices anterior mente mencionados y analizados para cada uno de los ítems. Al final se encuentra el valor del alfa de Cronbach que definiremos a continuación.

3.7.3.7. Índice de Fiabilidad

El método de consistencia interna basado en el alfa de Cronbach permite estimar la fiabilidad de un instrumento de medida a través de un conjunto de ítems que se espera que midan el mismo constructo o dimensión teórica.

Cuando se pretende medir un constructo o dimensión teórica por medio de un conjunto de ítems, es importante determinar la consistencia interna del instrumento de medida, con este fin vamos a hallar la medida del índice de fiabilidad mediante el alfa de Cronbach. Esta medida se encarga de conseguir un valor en cuanto a que los ítems miden un mismo constructo y están altamente correlacionados (Welch & Comer, 1988). A esta medida se le conoce como fiabilidad y debe obtenerse siempre con los datos de cada muestra; si el valor de alfa es cercano a 1 la consistencia interna de los ítems analizados es mayor.

Podemos observar que el índice de correlación d Cronbach es excelente en el grado 6C, pero es inaceptable en el grado 6A, por lo tanto, al eliminar en la tabla las preguntas que fueron descartadas según el criterio de los expertos, el índice de correlación toma un valor de 0,93895403 lo que significa que la prueba tiene buena consistencia para esta población. Las demás preguntas se dejan en el cuestionario, incluso las que menos fueron contestadas por los estudiantes debido a que son muy congruentes con los objetivos del presente estudio. Al eliminar las mismas preguntas en ambos grados y hacer el análisis de correlación para toda la muestra se tiene un alfa de Cronbach igual a 0,92731117 por lo que claramente observamos que no se afecta la correlación de los ítems utilizados para el instrumento definitivo.

Podemos observar que hay una serie de ítems que no discriminan ya que o todos los estudiantes aciertan o todos fallan, sin embargo, son ítems necesarios para conocer el nivel de comprensión en el que se encuentra determinado sujeto. También existen unos ítems que presentan un alto nivel de dificultad, y son precisamente esos ítems los que presentan procesos más complejos para la construcción de conocimiento.

3.7.3.8. Consideraciones finales para el análisis del cuestionario de prueba

- El análisis de las preguntas realizadas por parte de los expertos se hizo por separado, coincidiendo ambos en el criterio de eliminar los puntos que evalúan los mismos contenidos. Por este motivo se decide eliminar los ítems 2c, 7a, 7b, 7c, 8b, 13, 22a, 22b, 22c, 22d y 22e, reduciendo la prueba de 68 ítems a 57.
- También se estudió la posibilidad de reducir ítems en otras preguntas como es el caso de la pregunta 11 que contiene 7 ítems desde a hasta g, pero se consideró pertinente mantenerla tal como fue originalmente formulada para poder obtener más información sobre la comprensión del concepto de fracción decimal.
- El índice de dificultad muestra una buena proporción en la distribución con respecto al total de la muestra.
- El índice de homogeneidad de la prueba muestra valores muy bajos de correlación en 30 de los 68 ítems, que equivale a un 40 por ciento de la prueba, sin embargo, es muy difícil mantener índices altos de correlación debido a la amplitud de temas evaluados en la prueba.
- El índice de fiabilidad resulta ser favorable para el total de la muestra, lo que permite concluir que fue pertinente tomar como muestra ambos grupos quienes representan el 61% de la población objeto de estudio.
- Es posible que las características de la población descritas anteriormente afecten los valores del análisis de la prueba.

- Debido a que la población es reducida, se dedujo que es mejor reducir el número de ítems sin cambiar la estructura de las preguntas que quedan en el cuestionario definitivo, este hecho unido a que todos los estudiantes recibieron las mismas enseñanzas, son factores que permiten tener en cuenta los datos obtenidos en el cuestionario piloto y los de la prueba definitiva sin afectar el propósito de la investigación.

3.8. Diseño y aplicación del cuestionario definitivo

Después de haber hecho el análisis por parte de los expertos al instrumento se hacen los cambios que se consideran más pertinentes, teniendo cuidado en cuanto a no cambiar o eliminar un ítem que evalúe la comprensión de uno de los elementos específicos que forman parte de la propuesta de enseñanza, estos elementos están inmersos en los contenidos que se brindaron a los estudiantes mediante las secuencias didácticas planeadas en el ciclo ACE.

3.8.1. Muestreo

Entre los tipos de muestreo se tienen en cuenta las siguientes estrategias, dado que para poder obtener buena información de los procesos se deben elegir estudiantes que sean comunicativos y que aporten a el propósito de la investigación.

3.8.1.1. Muestreo no probabilístico

La elección de los sujetos de estudio no depende de la probabilidad, sino del criterio del investigador. Según (Campos 2010), los principales métodos de este tipo de muestreo son:

1. Muestreo decisional: se realiza bajo el criterio del investigador.
2. Muestreo por cuota: previa clasificación de la población estudiada se utilizan las categorías para obtener un número de sujetos de cada categoría.
3. Muestreo basado en expertos. Se eligen los estudiantes con base en recomendaciones de las personas que conozcan la población de estudio.
4. Muestreos casuales o fáciles de estudiar. Se refiere a sujetos que tengan facilidad de acceso y que acuden regularmente a un lugar.

Teniendo en cuenta estos criterios se procede a elegir a tres estudiantes por cada grupo, se eligieron estudiantes de los grupos que hicieron parte de la prueba piloto ya que hicieron parte de todo el proceso de intervención de aula y las preguntas seleccionadas para el cuestionario definitivo fueron las mismas que se hicieron en la prueba piloto.

3.8.2. Sujetos

Los 23 estudiantes a quienes se les aplica el cuestionario definitivo tienen las características descritas anteriormente para la población y corresponde al grupo 6B la aplicación de la prueba para el posterior análisis, determinaremos los registros fotográficos de la prueba así: E1-6ª-P1, o sea E1 = Estudiante 1, 6A = Grupo al que pertenece.el estudiante y P1 pregunta a la que pertenece la pregunta analizada.

3.8.3. Cuestionario definitivo

Se presenta el cuestionario definitivo en el cual se describen los elementos y la relación existente entre éstos (Ver Anexo Q en CD).

3.8.4. Aplicación de la prueba

La prueba fue aplicada el 15 de noviembre de 2017 a los estudiantes del grado 6B bajo la supervisión del investigador. A la prueba asistieron los 23 estudiantes pertenecientes al curso y el tiempo que se estimó para la solución del cuestionario fue de 2 horas; los estudiantes fueron avisados con anticipación de la fecha y hora de la prueba, también se informó a los padres de familia del propósito de dicha prueba la cual estaba por fuera del sistema de calificaciones para la aprobación o desaprobación de la asignatura, los estudiantes presentaron siempre buen ánimo y disposición hacia el trabajo realizado.

Para ver los resultados de la prueba favor remitirse al (Anexo R en CD)

3.8.5. Las entrevistas

Una vez hecha la recolección de la información, se realizó la codificación mediante un análisis previo a fin de categorizar cada respuesta. Las respuestas de los estudiantes fueron consignadas en una matriz de la que se obtuvieron los resultados del análisis de variables o indicadores anteriormente descrito para determinar la fiabilidad de la prueba y su validez. Se realiza una clasificación por grupos, previa observación de los elementos matemáticos descritos en la descomposición genética del concepto de número decimal, diseñando y rediseñando la prueba, integrando y reintegrando los conceptos y los elementos que hacen parte del concepto de número decimal.

Se determina que la entrevista debe ser semiestructurada para dar más confianza a los estudiantes y estarán basadas en el cuestionario definitivo. Según Ginsburg et al. (1983), la entrevista semiestructurada, es un método mixto, en el que el entrevistador pide al estudiante que exprese todo lo que va haciendo y pensando (pensando en voz alta) y que, para facilitar la verbalización, el entrevistador va haciendo preguntas que ayuden a profundizar en la forma de pensar del alumno. (Tomado de Aldana 2011 pp. 136). Segú la necesidad de nuestros objetivos de investigación y las características del ciclo de investigación de la teoría APOE, se tomaron 9 de los estudiantes que hacen parte de la muestra, selección que se realizó de manera no probabilística entre los estudiantes que presentan mejores características para ser entrevistados.

Capítulo 4: Procedimiento de análisis

4.1. Los elementos matemáticos

Dos o más elementos matemáticos se pueden configurar para dar forma a un concepto matemático. Adaptando la definición de Piaget (1963, p. 8) enunciada por Aldana (2011) y Bodí (2006) en el marco de la teoría APOE, entendemos los elementos matemáticos como "el producto de una disociación o de una segregación del Concepto de Número Decimal, vinculada al concepto y a sus propiedades". Los elementos matemáticos que se logran identificar son útiles para reconocer las conjunciones lógicas que realizan los estudiantes en el proceso de construcción del esquema de número decimal.

4.2. Sistemas de representación

Según Rico (1996, 2009) los sistemas de representación son notaciones o diferentes maneras del lenguaje por medio de las cuales un individuo puede expresar las características y propiedades de un concepto matemático, dichas representaciones pueden ser gráficas, algebraicas y analíticas o en lenguaje natural verbal o escrito, estas representaciones aparecen para representar una misma concepción, y es una herramienta que se utiliza para saber si el estudiante ha esquematizado el concepto de número decimal, cambiando de una forma de representación a otra entre los elementos que serán descritos a continuación. En la siguiente tabla se referencian los diferentes elementos matemáticos de la descomposición genética tenidos en cuenta para el presente estudio y las preguntas que se relacionan directamente con cada uno de los elementos, las acciones y los procesos relacionados con estos elementos se presentarán más adelante.

Tabla 33
Sistemas de representación de los elementos matemáticos.

Elementos	**Sistemas de representación**				**Preguntas relacionadas**
Potencias de 10	Forma exponencial	Forma numérica: un uno seguido de ceros		Lenguaje natural	4a, 4b, 4c, 4d, 5c, 7a, 7b, 8a, 8b, 8c, 8d.
Descomposición en factores primos	Forma exponencial	Forma de productos		Lenguaje natural	10a, 10b, 10c, 10c, 10d, 10e, 10f, 10g.
Número fraccionario	Expresión decimal finita	Expresión decimal periódico puro y mixto	Recta numérica	Lenguaje natural	17, 18, 19a, 19d, 19e, 20a, 20b, 21b, 21c, 24.
Fracción decimal	Expresión decimal	Fracción simplificada	Recta numérica	Lenguaje natural	4a, 4b, 4c, 4d, 5c, 7a, 7b, 8a, 8b, 8c, 8d, 10, 16, 24.
Valor posicional	Expresión decimal		Recta numérica		1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 15, 21d, 21e, 25, 26.
Número decimal	Gráficamente por medio de figuras	Fracción decimal	Recta numérica	Lenguaje natural	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 19d, 21a, 22, 23, 25, 26, 27.
Expresión polinómica de un número decimal.	Expresiones decimales	Fracciones decimales		Lenguaje natural	5a, 5b, 5c.
Comparación y orden	Expresión decimal			Lenguaje natural	3, 11, 12, 15, 16, 22, 23, 25, 26.
Densidad	Entre 2 números siempre hay otro	Antecesor y sucesor	Recta numérica	Lenguaje natural	13, 14.
La fracción como cociente	Expresión decimal	Algoritmo división	Fracción generatriz		17, 18, 19a, 20a, 20b, 24.
Número irracional	Expresión decimal truncada	Representación simbólica, ej: π		Lenguaje natural	21

Truncamiento	Expresión decimal		Recta numérica		21d, 21e.
Porcentaje	Expresión decimal	Fracción decimal			24.
Medidas de longitud	Expresión decimal	Fracción decimal	Recta numérica	Lenguaje natural	25,26.

Relación de los elementos matemáticos del concepto de número decimal con los sistemas de representación. Fuente: Elaboración propia

4.3. Las relaciones lógicas

Las relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos pueden ser:

- Conjunción lógica ($A \wedge B$)
- Condicional ($A \rightarrow B$)
- Contraria de la condicional ($\neg A \rightarrow \neg B$)
- Conjunción lógica ($A \vee B$)
- Conjunción lógica ($A \wedge B \rightarrow C$)

Una conjunción lógica se establece cuando el estudiante relaciona dos o más elementos para hacer inferencias, ejemplo:

> ***Si*** *a un número decimal le quitamos la coma* ***y*** *le ponemos un denominador con una potencia de 10 que tenga el número de ceros igual al número de cifras en la parte decimal* ***entonces*** *lo expresamos en forma de fracción decimal.*

Veremos que conjunciones lógicas que infieren los estudiantes para lograr la comprensión del concepto de número irracional.

4.4. Forma de conocer acción

Para el análisis de la comprensión del concepto de número decimal se tienen en cuenta las siguientes acciones según las operaciones que se realizan con los elementos matemáticos, estas acciones se relacionan con las preguntas del cuestionario definitivo:

Tabla 34
Acciones y procesos relacionados con los elementos matemáticos y las preguntas del cuestionario definitivo.

Elementos	Acciones y procesos relacionados	Preguntas
Reconocer las características de un número decimal.	Diferenciar la parte entera de la parte decimal. La parte entera se encuentra antes de la coma. La parte decimal se encuentra después de la coma.	1, 2
Conocer el valor de las cifras de un número decimal en sus diferentes notaciones.	Reconocer el valor de posición de las cifras de la parte entera. Reconocer el valor de las cifras de la parte decimal.	2, 3, 4, 5, 6
Expresión polinómica de un número decimal.	Reconocer el valor de las cifras de la parte entera en forma de expresión decimal. Reconocer el valor de las cifras de la parte decimal en forma de expresión decimal. Reconocer el valor de las cifras de la parte decimal en forma de fracción decimal. La suma de los valores posicionales compone un número decimal.	5
Convertir un número decimal en una fracción decimal	Contar el número de cifras en la parte decimal. Poner el mismo número de ceros en la potencia de 10 del denominador de la fracción.	7
Convertir una fracción decimal en número fraccionario	Contar el número de ceros del denominador de la fracción decimal. Poner el mismo número de cifras decimales después de la coma.	8

Graficar los números decimales en la recta numérica.	Elegir una escala con dos valores consecutivos que tengan una cifra menos de la que se va a graficar. Dividir las unidades y subunidades en 10 partes. Contar el número de partes.	9
Fracción decimal	Reconocer que las fraccione decimales son las que tienen potencias de 10 en el denominador. Reconocer que las fracciones decimales son las que tienen a 2 y a 5 como únicos múltiplos del denominador.	10
Comparación y orden	Comparar los valores numéricos de las cifras de la parte entera para ordenar. Comparar los valores numéricos de las cifras de la parte decimal para ordenar.	11, 12, 22, 23
Densidad	Un número decimal no tiene sucesor ni antecesor. Entre dos números decimales hay infinitos números.	13, 14
Expresiones equivalentes.	Al agregar el mismo número de ceros en el numerador y el denominador de una fracción decimal no altera su valor. Los ceros a la derecha de un número decimal no alteran su valor.	15, 16, 22, 23
La fracción como cociente	Una fracción se puede convertir en una expresión decimal dividiendo el numerador entre el denominador. Si en la parte decimal se repite un dígito o una secuencia de dígitos se genera un periodo. Para escribir un número decimal periódico se pone una línea sobre las cifras que se repiten. Si no sobran decimales que no pertenecen al período el número es periódico puro. Si sobran decimales que no pertenecen al período el número es periódico mixto.	17, 18, 19
Fracción generatriz de números decimales periódicos.	Encontrar la fracción generatriz de un número periódico puro. Encontrar la fracción generatriz de un número periódico mixto.	20
Número irracional	Una expresión decimal infinita periódica no es un número decimal. Una expresión infinita no periódica no es un número decimal. Una expresión infinita periódica es un número oracional. Una expresión infinita no periódica no es un número racional. Una expresión infinita no periódica es un número irracional.	21

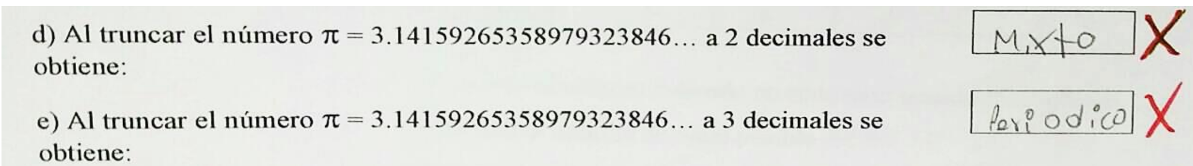
Aproximación	Aumentar 1 la última cifra decimal cuando la que le precede es mayor que 5. No aumentar 1 la última cifra decimal cuando la que le precede es menor que 5. Si la cifra precedente es igual a 5, se mira la cifra que sigue y se aplican los criterios anteriores.	21d, 21e
Porcentaje	Se transforma el porcentaje en una fracción decimal. Se multiplica esta fracción por el valor dado. Para encontrar un descuento se resta el valor del porcentaje de un número con el valor dado.	24
Medidas de longitud	Se construye la escala de medidas. Se ubican los dígitos de la unidad de medida dada. Se escribe la unidad de medida pedida. Si la unidad de medida pedida es menor, la coma se corre para la derecha y se agregan ceros si no alcanzan las cifras del número dado. Si la unidad de medida pedida es mayor, la coma se corre para la izquierda y se agregan ceros si no alcanzan las cifras del número dado.	25, 26
Número decimal	Fracción decimal. Expresión decimal con coma. Potencias de 10.	27

Fuente: Elaboración propia.

Recordemos que las acciones son la base para la comprensión y construcción de los procesos, objetos y esquemas; éstas acciones están descritas de manera más detallada en la descomposición genética, sin embargo, los estudiantes destacan las acciones descritas anteriormente para construir la comprensión del concepto de número decimal.

Las anteriores acciones fueron las que se evidenciaron de manera más notoria en la prueba, los estudiantes realizan dichas acciones, pero no relacionan unas acciones con otras para demostrar buena comprensión de la idea asociada a los elementos y sus diferentes representaciones, en la forma de reconocer acción, son diversos los errores que se cometen a lo largo de las pruebas y además son muy notorios (Ver Anexo S en CD) , no se hace necesario recurrir a las entrevistas y tampoco se hace referencia al estudiante que muestra estas construcciones en la prueba, solamente la manera de conocer los elementos identificados para la comprensión del concepto de número decimal.

Para efectos del presente análisis no se tendrán en cuenta las preguntas que no fueron respondidas por los estudiantes, y tampoco se tuvieron en cuenta las preguntas que presentaron incoherencias con el contexto de la pregunta como se muestra a continuación:

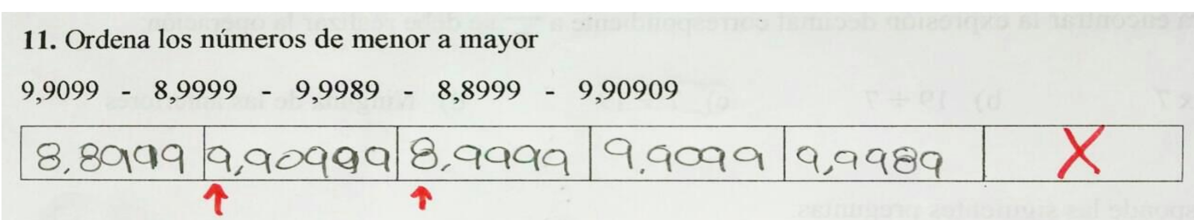

d) Al truncar el número $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$ a 2 decimales se obtiene: Mixto

e) Al truncar el número $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$ a 3 decimales se obtiene: Periodico

E22-6B-P21

A manera de ejemplo veamos que sucede en las acciones: “valor posicional”, “comparar las cifras de la parte entera para ordenar” y “comparar las cifras de la parte decimal para ordenar” se pueden presentar las siguientes dificultades:

- En la pregunta 11 del cuestionario el estudiante debe comparar primero la parte entera, claramente el estudiante no aplica de manera correcta este elemento de la comparación.

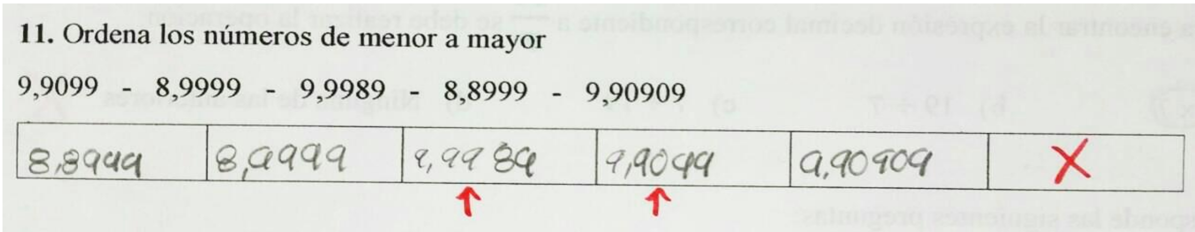

11. Ordena los números de menor a mayor

9,9099 - 8,9999 - 9,9989 - 8,8999 - 9,90909

8,8999	9,90999	8,9999	9,9099	9,9989	X

E5-6B-P11

- En esta misma pregunta el estudiante realiza bien la acción de comparar primero la parte entera, pero comete errores al comparar la parte decimal.


11. Ordena los números de menor a mayor

9,9099 - 8,9999 - 9,9989 - 8,8999 - 9,90909

8,8999	8,9999	9,9989	9,9099	9,90909	X

E15-6B-P11

4.5. Forma de conocer proceso

La manera de conocer proceso en la comprensión de los estudiantes se evidencia cuando vinculan las ideas preconcebidas de los elementos que pertenecen al concepto de número decimal para conformar una estructura más amplia y comprender procedimientos un poco más elaborados y complejos, tales como: construcción de números decimales y orden, diferentes formas de representar de un número decimal, para reconocer si una fracción es un número decimal o no lo es densidad del conjunto de los números decimales, para encontrar la fracción generatriz de un número decimal periódico, para conocer el concepto de número irracional, para calcular el tanto por ciento de un número cuando el porcentaje es un número natural., para hacer el cambio entre unidades métricas de longitud, para usar el algoritmo de la división para determinar si una fracción es decimal o no lo es, para encontrar expresiones equivalentes de un número decimal y para hacer el truncamiento de una expresión decimal; se tienen en cuenta todos estos elementos para reconocer cuando el estudiante ha interiorizado los procesos estableciendo diferentes mecanismos de construcción. Los procesos evaluados fueron todos analizados (Ver Anexo T en CD), a continuación, el ejemplo que venimos desarrollando.

4.6. Forma de conocer objeto

Según Aldana (2011) "Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto" (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996).

De esta manera podemos reconocer objeto en torno a la comprensión de los números decimales cuando el estudiante encuentra relación entre los procesos que hacen parte de las diferentes maneras de expresar los números decimales, para construir números decimales teniendo en cuenta el valor posicional y el orden, para reconocer cuando un número es irracional, decimal o racional y las relaciones o exclusiones existentes entre estos conjuntos numéricos, y al aplicar los números decimales a otros contextos como el de las medidas y resolver problemas.

A medida que se fueron analizando los casos en los cuales es posible una comprensión de objeto, se fue evidenciando la manera como los estudiantes, al relacionar estos objetos con otros procesos y objetos, van construyendo esquemas que amplían su comprensión del concepto de número decimal y algunas de sus aplicaciones hasta lograr la interiorización de los mecanismos que permiten la comprensión del concepto de número irracional (Ver Anexo U en CD).

4.7. Forma de entender esquema

Los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas. El esquema, “es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante.” (Asiala et al, 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos (Aldana 2011).

4.8. Análisis de las entrevistas

4.8.1 Caracterización de los niveles de desarrollo del concepto de número decimal

A partir del análisis teórico sobre los libros de texto y las investigaciones previas, se elabora una caracterización de los niveles intra, ínter y trans que pueden llegar a evidenciarse en los estudiantes en la construcción del concepto de número decimal. La caracterización descrita a continuación es el resultado de una adaptación de la caracterización realizada por Aldana (2011) para la comprensión de la integral definida.

Tabla 35

Caracterización de los niveles de desarrollo del concepto de número decimal.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
INTRA 1	1. No establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. 2. Recordar acciones de manera aislada para realizar un proceso. 3. No tener sintetizados los conceptos que hacen parte de los sistemas de representación.
INTRA 2	1. Recordar elementos matemáticos con errores. 2. No establecer relaciones lógicas entre las acciones que caracterizan un elemento con sus otros tipos de representación.

	3. Olvidar o confundir las acciones a seguir para realizar las acciones que hacen parte de un procedimiento.
ÍNTER 1	1. Usar diferentes relaciones lógicas entre algunos elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación en un contexto formal. 2. Manifestar limitaciones para recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de transformaciones en los diferentes sistemas de representación. 3. Establecer con restricciones algunas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos dados y los diferentes sistemas de representación.
ÍNTER 2	1. Usar diferentes relaciones lógicas entre todos los elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación en un contexto formal. 2. Presenta dificultades para hacer relaciones lógicas entre elementos matemáticos dados y los diferentes sistemas de representación de forma correcta en un contexto formal o real.
TRANS	1. Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos dados y los diferentes sistemas de representación en un contexto formal o real. 2. Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de un problema, usando los significados implícitos para dar una respuesta acertada. 3. Tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Fuente: Adaptado de Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría “APOE”. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca España.

A partir de la tabla anterior se realizan las adecuaciones de cada una de las características de los niveles a las acciones que realizan los estudiantes sobre los elementos que componen el concepto de número decimal que fueron tenidos en cuenta en la prueba.

El análisis de los ítems de los cuestionarios junto con las entrevistas de los estudiantes, permitió desarrollar una caracterización de los elementos que ellos tienen en cuenta en cuenta en cada pregunta, dentro de los cuales se establecen diferencias en el nivel de comprensión que ellos presentan al responder las preguntas y al describir las justificaciones, evidenciando paso a paso la mecanismos usados para las acciones, procesos y objetos; de esta manera se va configurando el esquema que determina la comprensión que tiene el estudiante del concepto de número decimal.

4.9. Análisis de los niveles de comprensión de los estudiantes

Al escuchar los audios uno a uno, se fueron mostrando los elementos y las operaciones sobre estos elementos, se fueron revisando una a una las acciones y la conformación de procesos junto con los mecanismos de comprensión que logra evidenciar el estudiante. Al ir escuchando una a una las preguntas junto con las justificaciones dadas por los estudiantes, se va configurando la red propuesta para la comprensión del concepto de número decimal en grado sexto del nivel de educación media en Colombia, y se establece, con base en la caracterización, el nivel de comprensión en el que se encuentra el estudiante. Para el desarrollo del análisis se muestran las preguntas más relevantes para determinar el nivel de comprensión, se caracterizará al estudiante así: Ent1 = Entrevistado 1, E1 = Estudiante 1, 6A = Grupo al que pertenece.

4.9.1. Nivel Intra 1.

El estudiante que pertenece al nivel Intra 1 no logra identificar las características principales del número decimal, se caracteriza por no hacer buen uso de la coma ni de la escritura de los ceros al hacer transformaciones. El estudiante puede lograr hacer algunas acciones, pero comete errores y no establece lógicas adecuadas en los elementos que hacen parte del concepto de número decimal.

Tabla 36
Descripción de las características del nivel Intra 1.

NIVEL	DESCRIPCIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS
INTRA 1	**1. No establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos.** **a.** El estudiante no establece relación entre el número de dígitos en la parte entera y el valor de un número decimal. **b.** El estudiante no establece relación entre la posición de los dígitos en la parte decimal y el valor de un número decimal. **c.** El estudiante no realiza la representación de los números decimales a partir del lenguaje natural escrito. **2. Recordar acciones de manera aislada para realizar un proceso.** **a.** El estudiante conoce el orden de los números, pero no tiene claro el valor numérico de cada posición, lo que no le permite ordenar bien los números que tienen cifras decimales. **b.** El estudiante reconoce la parte entera de la parte decimal, pero no lo relaciona con el orden y los valores numéricos de los dígitos. **c.** El estudiante no reconoce que el número de ceros que hay en el denominador de una fracción decimal está relacionado con el número de cifras en la parte decimal y también con el valor posicional de una cifra. **3. No tener sintetizados los conceptos que hacen parte de los sistemas de representación.** **a.** El estudiante no distingue la parte entera de la parte decimal. **b.** El estudiante no ha asimilado lógicas que le permitan comprender que entre dos números decimales hay infinitos números. **c.** El estudiante no reconoce la diferencia entre un número decimal periódico puro y uno mixto. **d.** El estudiante no reconoce cuando un número con decimales infinitos tiene periodo y cuando no. **e.** El estudiante no vincula los criterios de infinito con los conceptos de antecesor y sucesor. **f.** El estudiante no da razón de lo que significa fracción decimal, se olvida de las condiciones que debe tener el denominador o las recuerda, pero sin claridad.

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Número Decimal para el estudiante E1-6B.

Se enuncia este caso, ya que es uno de los más evidentes en los que se puede observar que el estudiante se encuentra en un nivel de comprensión trans 1, estudiantes de este nivel de comprensión no han sido entrevistados ya que no son estudiantes que entreguen mucha información referente a los números decimales y a su comprensión de las competencias que se han tratado en las clases, este factor ha sido reconocido desde la experiencia durante el tiempo que se ha desarrollado la secuencia didáctica.

Tabla 37

Tabla de correspondencias con la caracterización del nivel Intra 1.

Aspectos que pertenecen al nivel Intra 1	Elementos matemáticos que no reconoce
1d, 1e, 1f 2d, 2e, 2f 3g, 3h, 3i, 3j, 3k, 3l	• Partes de un número decimal. • Orden en los números decimales. • Transformación entre las diferentes formas de expresar un número decimal. • La recta numérica. • Expresiones equivalentes. • La fracción como cociente. • Número decimal, racional e irracional. • Aproximación. • Problemas expresiones equivalentes. • Porcentajes. • Cambio de unidades de medida.

Aspectos que pertenecen al nivel Intra 1 del estudiante E1-6B.

4.9.2. Nivel Intra 2.

El estudiante que pertenece al nivel Intra 2 reconoce las características principales del número decimal, , realiza acciones y procesos de algunas transformaciones entre las diferentes representaciones del número decimal, pero no logra establecer relacionas lógicas entre los elementos del número decimal, recuerda algunos elementos de manera aislada y no tiene claros los conceptos que hacen referencia al orden, equivalencia de expresiones decimales y de fracciones decimales, concepto de densidad, no realiza adecuadamente operaciones que permiten hallar un decimal periódico a partir de una fracción ni establecer diferencias con el número decimal e irracional.

Tabla 38
Descripción de las características del nivel Intra 2.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
INTRA 2	**1. Recordar elementos matemáticos con errores.** **a.** El estudiante presenta errores en las operaciones básicas, lo que se convierte en un obstáculo para la comprensión. **b.** El estudiante puede hacer el cambio de representación del lenguaje común a fracción decimal, pero comete errores al hacer el cambio de registro de número decimal a fracción decimal. **c.** El estudiante presenta dificultades para recordar el orden que lleva el valor numérico de las cifras al hacer comparaciones entre ellos. **d.** El estudiante determina cuando una expresión decimal con coma es un número decimal, pero presenta dudas o dificultades con los criterios. **e.** El estudiante reconoce que un número no tiene sucesor porque en realidad podría tener infinitos sucesores, pero manifiesta que entre dos números hay una cantidad finita de números. **e.** El estudiante conoce el valor posicional y sabe entre que par de números se encuentra un número decimal, pero comete errores al establecer un orden entre un conjunto de números. **f.** El estudiante conoce las características de un número decimal periódico, pero comete errores para identificar el periodo. **2. No establecer relaciones lógicas entre las acciones que caracterizan un elemento con sus otros tipos de representación.** **a.** El estudiante no reconoce cuántos elementos hay en un intervalo en el conjunto de los números decimales. **b.** Cuando el estudiante realiza el cambio de representación de un número decimal de una manera a otra no ubica bien la coma, no pone el número de ceros que corresponde a la potencia de 10 en el denominador o se le olvida poner la coma, entre otras. **c.** El estudiante no establece relaciones lógicas entre número decimal, racional e irracional a partir de una expresión decimal con coma. **d.** El estudiante no utiliza adecuadamente las lógicas para la construcción de la recta numérica para representar los números decimales ni las fracciones decimales.

e. El estudiante no utiliza los criterios para determinar cuándo dos números decimales son equivalentes.
f. El estudiante no reconoce cuando dos fracciones decimales son equivalentes.
g. El estudiante no reconoce el método para truncar un número con infinitos decimales.

3. Olvidar o confundir las acciones a seguir para realizar las acciones que hacen parte de un procedimiento.
a. El estudiante no reconoce los valores numéricos de los números decimales, o los recuerda con dificultad.
b. El estudiante puede convertir los números de una forma de representación a otra, pero presenta dificultades, recuerda con dificultad los criterios de conversión.
c. El estudiante reconoce que un número con denominador 2 y 5 es una fracción decimal pero no reconoce una fracción decimal cuando el denominador es el producto de varios de estos dos números como factores.
d. En el cambio de representación de una fracción decimal en número decimal, el estudiante pone antes de la coma el número de ceros que hay en el denominador.
e. El estudiante reconoce que entre dos números existen infinitos números, pero no sabe determinar por qué son infinitos.
f. El estudiante se confunde con los criterios de las acciones que se deben realizar para encontrar la fracción generatriz de un número decimal periódico puro o periódico mixto.
g. El estudiante realiza el truncamiento de una expresión decimal pero no tiene en cuenta las cifras que siguen para realizar una aproximación.
h. El estudiante no ejecuta acciones de transformación que permitan realizar el cambio de representación entre los elementos fracción decimal y número decimal.
i. El estudiante no vincula el algoritmo de la división con la fracción para transformar una fracción en una expresión decimal.

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Número Decimal para el estudiante Ent9 E18-6C.

El estudiante no presenta muchas características del nivel inter 1, por este motivo queda catalogado en un nivel de comprensión intra 2, los aspectos de su caracterización son los siguientes:

Tabla 39
Tabla de correspondencias con la caracterización del nivel Intra 2.

Aspectos que pertenecen al nivel Intra 2	**Elementos matemáticos en los olvida o confunde acciones**	**Elementos matemáticos en los que no establece relaciones lógicas**
1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1g 2a, 2b, 2c, 2d, 2f, 2g 3b, 3c, 3e, 3f	• Construcción de números decimales. • Transformación de número decimal a fracción decimal. • Transformación de fracción decimal a número decimal. • Representación de números decimales en la recta numérica. • La fracción como cociente. • Cambio de unidades de medida.	• Propiedad de densidad en los números decimales. • Equivalencia de fracciones decimales. • La fracción como cociente. • Fracción generatriz de números decimales infinitos. • Número decimal, racional e irracional. • Aproximación. • Porcentajes. • Problemas expresiones equivalentes.

Tabla de correspondencias del nivel Intra 2 para el estudiante Ent 9 E18-6C.

4.9.3. Nivel Inter 1.

El estudiante que ha llegado a un nivel de comprensión Ínter 1 ha logrado comprender procesos entre los diferentes sistemas de representación del número decimal, concepto de infinito, orden y equivalencias, pero solo encapsula estos procesos en objetos en el campo formal de los elementos que pertenecen al concepto del número decimal, sin lograr avanzar en el uso del concepto en otros contextos. El estudiante no ha logrado establecer las lógicas que le permiten amarrar estas acciones y procesos a la comprensión de los diferentes conjuntos: número decimal, racional e irracional que comparten la escritura de expresión decimal con coma.

Tabla 40
Descripción de las características del nivel Inter1.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
INTER 1	**1. Usar diferentes relaciones lógicas entre algunos elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación en un contexto formal.** **a.** El estudiante tiene claros los criterios de orden y el valor numérico de las cifras. **b.** El estudiante ha asimilado los criterios para determinar el orden entre números decimales, lo que le permite construir números con un conjunto de dígitos y unas condiciones dadas. **c.** El estudiante ejecuta acciones de transformación que permitan realizar el cambio de representación entre los elementos fracción decimal y número decimal. **d.** El estudiante realiza la representación de los números decimales a partir del lenguaje natural escrito. **e.** El estudiante utiliza los criterios para determinar cuándo dos números decimales son equivalentes. **f.** El estudiante utiliza los criterios para determinar cuándo dos fracciones decimales son equivalentes. **g.** El estudiante construye la recta numérica para representar los números decimales y las fracciones decimales. **h.** El estudiante reconoce la diferencia entre un número decimal periódico puro y uno mixto. **i.** El estudiante presenta claridad en las lógicas que le permitan comprender que entre dos números decimales hay infinitos números. **j.** El estudiante reconoce cuando un número con decimales infinitos tiene periodo y cuando no. **k.** El estudiante recuerda el concepto de sucesor, antecesor, mayor que, menor que, dando explicación desde lo que sucede con los números en la recta numérica. **l.** El estudiante vincula los criterios de infinito con los conceptos de antecesor y sucesor. **m.** El estudiante conoce las divisiones y subdivisiones del metro y realiza correctamente el cambio entre éstas. **2. Manifestar limitaciones para recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de transformaciones en los diferentes sistemas de representación.**

a. El estudiante conoce los pasos para representar números decimales en la recta numérica pero no logra coordinarlos, los recuerda de manera aislada.
b. El estudiante construye la recta numérica para ubicar los números decimales, pero no utiliza el concepto de manera clara y adecuada.
c. El estudiante reconoce que entre dos números existen infinitos números, pero no sabe determinar de manera exacta o con errores porqué son infinitos.
d. Manifiesta limitaciones para encontrar la fracción generatriz de un número decimal periódico puro o mixto debido a que no recuerda los pasos o criterios para encontrarlo.
e. El estudiante reconoce la parte entera y la parte decimal de un número y los valores posicionales de los números, pero presenta dificultades para establecer comparación y orden.
f. El estudiante reconoce las características de las expresiones decimales infinitas, pero presenta dificultad para dar explicación de cuando un número es racional o irracional y porqué no es decimal.
g. El estudiante conoce el método para convertir fracciones decimales en forma de expresión decimal con coma, pero falla en la ejecución de las acciones.
h. El estudiante presenta dificultades para aplicar el concepto porcentaje y realizar procesos de solución haciendo uso de las fracciones.
i. El estudiante realiza el truncamiento de números con decimales infinitos al número de cifras que se solicita, pero manifiesta limitaciones para recordar y aplicar el criterio de aproximación.
j. El estudiante no relaciona la propiedad que tienen los números decimales y las fracciones de representarse de manera equivalente agregando ceros con la solución de una situación problema.

3. Establecer con restricciones algunas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos dados y los diferentes sistemas de representación.

a. El estudiante realiza de manera correcta el cambio de representación de un número decimal a fracción decimal, pero lo hace cometiendo errores en el sentido opuesto.
b. El estudiante realiza de manera correcta el cambio de representación de una fracción decimal a número decimal, pero lo hace cometiendo errores en el sentido opuesto.
c. El estudiante reconoce las fracciones decimales cuando el denominador es una potencia de diez, pero no lo hace cuando el denominador es el resultado del producto de los múltiplos 2 y 5.
d. El estudiante sabe determinar cuándo una fracción no es decimal, pero no ha asimilado los criterios para sustentar sus respuestas.
e. El estudiante reconoce los criterios para que dos números decimales o fracciones decimales sean equivalentes, pero no los tiene en cuenta para solucionar situaciones problema.

f. El estudiante reconoce cuando un número decimal es una fracción, pero presenta dudas o dificultades con los criterios, sobre todo cuando se trata de fracciones no decimales.
g. El estudiante reconoce que entre dos números decimales existen infinitos números, pero presenta restricciones para determinar el antecesor y el sucesor de un número decimal.
h. El estudiante presenta limitaciones en la ejecución del algoritmo de la división para transformar una fracción en una expresión decimal.
i. El estudiante reconoce que el número pi no es un número decimal, pero se confunde con el concepto de truncamiento.

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Número Decimal para el estudiante Ent1 E14-6A.

El estudiante se encuentra a un paso de configurar los procesos para un nivel de comprensión Inter 2, se queda en el nivel inter 1 debido a que si bien ha realizado una construcción en la que ha encapsulado objetos que hacen referencia a las diferentes expresiones de número decimal, las expresiones con decimales periódicos, el orden de los números decimales y el valor posicional y las medidas; también recuerda con dificultad y comete errores en las acciones que hacen referencia a la comprensión de número irracional como expresión con infinitos decimales que no tienen un periodo y presenta errores en la solución de los ejercicios, por este motivo el estudiante no pertenece al nivel de comprensión inter 2, ya que para entrar en este nivel de comprensión el estudiante debe haber construido el concepto de número irracional. Veamos entonces la caracterización de los niveles de comprensión para este estudiante.

Tabla 41
Tabla de correspondencias con la caracterización del nivel Inter 1.
Aspectos que pertenecen al nivel Inter 1 del estudiante Ent 1 E14-6A

Aspectos que pertenecen al nivel Inter 1	**Elementos matemáticos en los que presenta dificultades para establecer relaciones lógicas**
1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1f, 1g, 1h, 1i, 1j, 1k, 1l, 1m 2a, 2c, 2d, 2e 3e, 3i	• Número decimal, racional e irracional. • Aproximación. • Porcentajes. • Problemas expresiones equivalentes.

4.9.4. Nivel Inter 2.

El estudiante que pertenece al nivel inter 2 logra comprender procesos entre los diferentes sistemas de representación del número decimal, concepto de densidad, orden y equivalencias, logra establecer las lógicas que le permiten amarrar estas acciones y procesos ampliando el esquema a la comprensión de los diferentes conjuntos: número decimal, racional e irracional que comparten la escritura de expresión decimal con coma. , pero solo encapsula estos procesos en objetos en el campo formal de los elementos que pertenecen al concepto del número decimal, sin lograr avanzar en el uso del concepto en otros contextos.

Tabla 42
Descripción de las características del nivel Inter 2.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
INTER 2	**1. Usar diferentes relaciones lógicas entre todos los elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación en un contexto formal.** **a.** El estudiante tiene claros los criterios de orden y el valor numérico de las cifras.

b. El estudiante ha asimilado los criterios para determinar el orden entre números decimales, lo que le permite construir números con un conjunto de dígitos y unas condiciones dadas.
c. El estudiante ejecuta acciones de transformación que permitan realizar el cambio de representación entre los elementos fracción decimal y número decimal.
d. El estudiante realiza la representación de los números decimales a partir del lenguaje natural escrito.
e. El estudiante utiliza los criterios para determinar cuándo dos números decimales son equivalentes.
f. El estudiante utiliza los criterios para determinar cuándo dos fracciones decimales son equivalentes.
g. El estudiante construye la recta numérica para representar los números decimales y las fracciones decimales.
h. El estudiante reconoce la diferencia entre un número decimal periódico puro y uno mixto.
i. El estudiante presenta claridad en las lógicas que le permitan comprender que entre dos números decimales hay infinitos números.
j. El estudiante reconoce cuando un número con decimales infinitos tiene periodo y cuando no.
k. El estudiante recuerda el concepto de sucesor, antecesor, mayor que, menor que, dando explicación desde lo que sucede con los números en la recta numérica.
l. El estudiante vincula los criterios de infinito con los conceptos de antecesor y sucesor.
m. El estudiante conoce las divisiones y subdivisiones del metro y realiza correctamente el cambio entre éstas.
n. El estudiante aplica de manera correcta las lógicas que permiten discriminar cuando un número es decimal, racional o irracional.

2. Presenta dificultades para hacer relaciones lógicas entre elementos matemáticos dados y los diferentes sistemas de representación de forma correcta en un contexto formal o real.

a. El estudiante no resuelve problemas cambios de unidades de medidas haciendo transformaciones en la notación de número decimal según las unidades de la escala métrica.
b. El estudiante no utiliza el concepto de fracción decimal para dar respuesta a problemas que tienen que ver con el concepto de porcentaje y no deduce acertadamente una situación en un contexto.
c. El estudiante reconoce el concepto de infinito de los números decimales, pero no lo explica a partir de la recta numérica bajo los preceptos de sucesor, antecesor y valor medio.
d. El estudiante reconoce el valor posicional de las cifras de un número decimal a partir de sus diferentes notaciones y de las diferentes formas de descomposición, pero se le dificulta construir números y resolver problemas usando estos criterios.

	e. El estudiante no realiza el truncamiento de números decimales teniendo en cuanta las cifras que siguen para hacer una aproximación.

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Número Decimal para el estudiante Ent2 E15-6A.

El estudiante ha realizado una construcción en la que ha encapsulado objetos que hacen referencia a las diferentes expresiones de número decimal, las expresiones con decimales periódicos, el orden de los números decimales y el valor posicional y las medidas. También el estudiante recuerda comete errores en el orden, en la construcción de números, al hacer aproximaciones del número pi y al resolver problemas, aunque presenta claridad al recordar los conceptos. Veamos entonces la caracterización de los niveles de comprensión para este estudiante.

Tabla 43
Tabla de correspondencias con la caracterización del nivel Inter 2.

Aspectos que pertenecen al nivel Inter 2	Elementos matemáticos en los que presenta dificultades para establecer relaciones lógicas
1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 1f, 1g, 1h, 1i, 1j, 1k, 1l, 1m, 1n 2a, 2c, 2d, 2e	• Aproximación. • Porcentajes. • Problemas expresiones equivalentes.

Aspectos que pertenecen al nivel Inter 2 para el estudiante Ent2 E15-6A

El estudiante presenta nivel inter 2 debido a que no presenta dificultades para hacer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, además hace correctamente transformaciones entre los diferentes sistemas de representación y los aplica en contextos reales y formales, también presenta más nivel de asertividad que el Ent1 frente al desarrollo de las preguntas de la prueba.

4.9.5. Nivel Trans.

El estudiante que llega al nivel trans ha logrado completar el esquema de número decimal con los conceptos sobre los cuales hemos hecho referencia durante el estudio. Llega a comprender el concepto de número irracional, establece las diferencias entre número decimal, racional e irracional mediante lógicas de comprensión bien estructuradas y resuelve situaciones problemas en un contexto real o formal.

Tabla 44
Descripción de las características del nivel Trans.

NIVEL	CARACTERÍSTICAS
TRANS	**1. Usar diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos dados y los diferentes sistemas de representación en un contexto formal o real.** **a.** El estudiante resuelve problemas cambios de unidades de medidas haciendo transformaciones en la notación de número decimal según las unidades de la escala métrica. **b.** El estudiante utiliza el concepto de fracción decimal para dar respuesta a problemas que tienen que ver con el concepto de porcentaje y deduce acertadamente una situación en un contexto. **c.** El estudiante reconoce el concepto de infinito de los números decimales y lo explica a partir de la recta numérica bajo los preceptos de sucesor, antecesor y valor medio. **d.** El estudiante reconoce el valor posicional de las cifras de un número decimal a partir de sus diferentes notaciones y de las diferentes formas de descomposición. **e.** El estudiante realiza de manera adecuada el truncamiento o aproximación de números decimales. **2. Recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de un problema, usando los significados implícitos para dar una respuesta acertada.**

a. El estudiante utiliza la recta numérica para relacionar elementos y para dar solución a situaciones problema que hagan alusión al orden, tamaño de un intervalo, infinito, punto medio, antecesor y sucesor, entre otros.
b. El estudiante utiliza los criterios de orden, valor posicional y equivalencias para solucionar problemas que requieren el uso de una o varias de estas lógicas.
c. El estudiante reconoce a partir de la representación de una expresión decimal y de una fracción si el número es decimal, racional o irracional.

3. Tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.
a. El estudiante realiza los cambios en los diferentes sistemas de representación de un número decimal, los representa gráficamente y reconoce la descomposición en sus diferentes formas.
b. El estudiante ha asimilado los criterios para determinar el orden entre números decimales, lo que le permite construir números con un conjunto de dígitos y unas condiciones dadas.
c. El estudiante aplica los criterios para determinar cuándo las fracciones son decimales y cuándo dos fracciones son equivalentes independientemente de que sean decimales o no.
d. El estudiante reconoce las características de las expresiones decimales infinitas para dar explicación de cuando un número es racional o irracional y porqué no es decimal.

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de Número Decimal para el estudiante Ent3 E20-6B.

Tabla 45
Tabla de correspondencias con la caracterización del nivel Trans.

Aspectos que pertenecen al nivel Trans	Principales elementos matemáticos para la construcción del esquema
1a, 1b, 1c, 1d, 1h, 1i, 1j,	• Expresar y transformar el número decimal en sus diferentes acepciones. • Densidad de los números decimales. • Número decimal, racional e irracional.

2a, 2b, 2c 3a, 3b, 3c	• Aproximación. • Porcentajes. • Transformación de unidades métricas de longitud. • Problemas expresiones equivalentes.

Aspectos que pertenecen al nivel trans para el estudiante Ent 3 E20-6B

Hemos descrito los niveles y subniveles de comprensión mostrando un ejemplo por cada nivel según los resultados obtenidos en la prueba y en las entrevistas, a continuación, mostraremos las implicaciones de haber realizado la caracterización.

Se pueden establecer similitudes entre los patrones de respuesta de los estudiantes que presentaron la prueba y los estudiantes encuestados para determinar el nivel de comprensión en el que se encuentran los estudiantes que hicieron parte de la investigación. A continuación haremos el análisis del esquema y de los niveles de comprensión según los resultados de los estudiantes que presentaron la prueba.

Capítulo 5: Desarrollo del Esquema de Número Decimal y Conclusiones

5.1. Configuración del Esquema de Número Decimal

Podemos observar que los procesos tenidos en cuenta para la descomposición genética inicial hacen parte esencial para la comprensión del concepto de número decimal. Por un lado, tenemos todos los saberes previos, en el cuerpo del concepto sus definiciones y transformaciones, por otro lado, sus propiedades y características, siguiendo en este orden, se pueden establecer comparaciones entre sus propiedades y diferentes notaciones y por último, sus aplicaciones.

Los saberes previos no fueron evaluados de manera directa pero los estudiantes usaron estos conceptos para argumentar las respuestas, como es el caso del entrevistado 2 quien respecto al elemento comprensión del proceso de conversión de números fraccionarios a fracciones decimales, para determinar cuáles de las fracciones no son fracciones decimales argumenta lo siguiente:

- *Ent2: Esta y esta. "el estudiante señaló 3/7 y 349/11"*
- *I: ¿Por qué no son fracciones decimales?*
- *Ent2: Porque yo las, las, las… ¿cómo es que se dice? Que se le hace la rayita aquí… las descompuse.*
- *I. ¿Y al descomponerlas qué pasa?*
- *Ent2: No me dio que fueran decimales*
- I: ¿Y 8/5 es una fracción decimal?
- *Ent2: Sí*
- *I: ¿Y por qué?*
- *Ent2: Porque se puede amplificar por 2 y da una fracción decimal.*
- *I: ¿Y 174/25?*
- *Ent2: Sí también, porque se amplifica por 4 y da 100*

En este caso el estudiante utiliza los conocimientos previos planteados en la descomposición genética, reflexiona sobre la **descomposición de un número en factores primos**, sabe que una fracción que tiene como denominador factores 2 y 5 son fracciones decimales mencionando otro conocimiento básico, **la amplificación de números fraccionarios**, y sabe por cuáles números se debe amplificar sin realizar la operación de manera escrita. Por lo tanto, se demuestra que la potenciación y el concepto de fracción son un camino válido para asimilar características de los números decimales desde la fracción decimal y también desde la concepción de la ampliación de los campos numéricos (Gómez 2010)

Siguiendo con lo enunciado en la página 37 de esta investigación, se puede observar que en la descomposición genética se tuvieron en cuenta la numeración y la medida, es en la numeración que el estudiante logra hacer inferencias lógicas a partir de la escritura de número con parte entera, parte decimal y la coma, para determinar si un número pertenece al conjunto de los decimales, de los racionales o a ambos, y si éste número es o no número decimal revisando en la parte decimal si un número con infinitos decimales tiene o no tiene periodo. Por esto el estudiante Entrevistado 3 logró un nivel trans de comprensión ya que conoce el número desde estas cuatro concepciones construyendo mecanismos de coordinación, encapsulación, reversión (desencapsulación) y tematización del concepto.

Para completar el esquema se configura el concepto de la densidad de los números decimales en el cuál los estudiantes que logran la comprensión de este elemento se apoyan en la recta numérica para construir la comprensión de la propiedad, entre las cuales está la comprensión del infinito, antecesor, sucesor y el valor intermedio. A la pregunta ¿Cuántos números hay entre l,6 y 1,7? el estudiante Entrevistado 3 responde:

Ent3: *Infinitos números*
I: *¿Y porque infinitos números?*
Ent3: *Porque cada vez que uno encuentra un número más junto, siempre va a haber otro más pegado.*

Al formular la siguiente pregunta se completa la argumentación del concepto de la densidad. ¿Cuál es el sucesor de 5,7?

Ent3: *No tiene sucesor, porque hay infinitos, se va encontrando uno más…*
I: *Y qué pasa allí, ¿por qué no tiene sucesor, vas encontrando más cómo?*
Ent3: *Porque digamos uno podría decir que 5,07 pero no porque también está con otro cero, pues se le van agregando ceros entonces no tendría un número definido.*
I: *¿Y al agregar ceros qué va pasando con el numerito allí?*
Ent3: *Se va acercando más*

Nótese que el estudiante no solo utiliza la recta numérica sino que enlaza su comprensión apoyándose en la escritura de los números decimales, demostrando comprensión de los que sucede cuando a un número, en este caso a 5,7; se le agregan ceros después de la coma así 5,07 ; 5,007 y se van encontrando números más próximos a 5,7 y también comprende que este proceso se puede desarrollar infinitamente.

En la siguiente tabla podemos observar cuáles es la ruta de procesos relacionados con los elementos de la descomposición genética inicial, muestra cuáles fueron evaluados de manera directa en los ítems y cuáles no, esta es la ruta que utilizó el estudiante para completar el esquema de número decimal:

Tabla 46
Mapa de procesos de la descomposición genética inicial.

Elementos de la descomposición genética inicial	**Procesos relacionados con los elementos de la descomposición genética inicial.**	**Eva-luado**
Concepto de potenciación. (SABER PREVIO)	Comprender que un número que se multiplica por sí mismo un número definido de veces se puede expresar en forma de potenciación. **(Proceso)** Comprender que el exponente determina el número de veces que se multiplica la base. **(Proceso)**	No
Potencias exactas	Descomponer el número dado **(Proceso)** Obtener la notación en forma de potenciación de un número que es una potencia exacta. **(Proceso)**	No
Descomposición en factores primos.	Descomponer el número dado **(Proceso)** Obtener la potenciación de un número que es una potencia exacta. **(Proceso)**	No
Descomposición en factores primos. Proceso inverso.	Cuando ya no sea posible seguir dividiendo por un número primo, determinar el siguiente número primo en orden consecutivo de menor a mayor por el cual se pueda dividir. **(Proceso)** Descomposición en factores primos de un número. **(Proceso)**	No
Concepto de fracción como Parte-Todo.	Un número fraccionario representa una cantidad de partes tomada de una unidad o de una colección de objetos **(Proceso)** Comprende la conversión de representación gráfica a forma simbólica matemática y viceversa. **(Proceso)**	No
Amplificación y simplificación de fracciones.	Las fracciones obtenidas amplificar y simplificar una fracción dada representan la misma cantidad. **(Proceso)**	Si
Fracciones decimales.	Una fracción decimal representa partes de la unidad divididas en potencias de 10 tomadas de una unidad o de una colección de objetos **(Proceso)** Comprende la conversión de representación gráfica a forma simbólica matemática y viceversa. **(Proceso)**	Si
Equivalencia de las representaciones semióticas de fracción decimal	Reconocimiento y representación de las fracciones decimales con el Sistema Métrico **(Proceso)** *Representación en forma de fracción de las expresiones decimales.* **(Proceso)** *Comprensión del concepto de fracción decimal.*	No
Cantidad que representa una fracción decimal.	Comprensión de la **cantidad que representa una fracción decimal.** Se multiplica la fracción decimal por el número. **(Proceso)** Se multiplican las fracciones decimales. **(Proceso)**	Si
Comprensión del proceso de conversión de números fraccionarios a fracciones decimales.	Descomponer el denominador de la fracción dada **(Proceso)** Si tiene un factor diferente a 2 ó a 5, el número no se puede convertir en una potencia de 10. **(Proceso)**	Si

	Determinar los factores que hagan falta para que el número se transforme en una potencia de 10. **(Proceso)**	
Comprensión del concepto de Número decimal.	Comprender que un número decimal es la expresión con coma de una fracción decimal. **(Proceso)** Realizar la lectura de expresiones decimales. **(Proceso)**	Si
Representación de los números decimales en la recta numérica.	Elegir el rango de las unidades, esta acción es muy útil cuando se van a representar. Hacer las divisiones y subdivisiones de la recta Contar el número de partes que indica el número.	Si
Conversión una fracción decimal a expresión decimal	Convertir una fracción decimal a expresión decimal **(Proceso)** Expresar la fracción decimal en forma polinómica. **(Proceso)** Convertir una fracción decimal a expresión decimal **(Proceso)**	Si
Porcentajes. Expresión de porcentajes en números decimales.	Convertir la expresión decimal del porcentaje en forma de fracción decimal **(Proceso)** Multiplicar la fracción decimal por el número al que le deseamos hallar el porcentaje **(Proceso)** Calcular el tanto por ciento de un número cuando el porcentaje es un número natural. **(Proceso)**	Si
Porcentajes. Expresión de porcentajes en números decimales.	Convertir la expresión decimal del porcentaje en forma de fracción decimal **(Proceso)** Convertir la fracción decimal a una que el numerador sea un número natural. **(Proceso)** Tanto por ciento de un número cuando el porcentaje es un número decimal. **(Proceso)**	No
Conversión de fracción decimal con numerador decimal en una fracción decimal.	Convertir la fracción decimal a una cuyo numerador sea un número natural. **(Proceso)**	No
Comprensión de la expresión polinómica de un número decimal.	Descomposición en forma polinómica de la expresión decimal de un número escrita en **lenguaje natural. (Proceso)** Descomposición forma polinómica de la expresión decimal de un número con **expresiones decimales** de la parte decimal Descomposición forma polinómica de la expresión decimal de un número usando **fracciones decimales** en la parte decimal.	Si
Comprensión equivalencia de números decimales.	Agregar ceros a la izquierda de la parte entera. (Acción) Agregar ceros a la derecha de la parte decimal. (Acción)	Si
Comparación y orden de expresiones decimales.	Comparación y orden de expresiones decimales. **(Proceso)**	Sí
Comprensión de la propiedad de densidad.	Determinar que hay infinitas opciones para encontrar el sucesor de un número decimal. **(Proceso)** Determinar que hay infinitas opciones para encontrar el antecesor de un número decimal. **(Proceso)** Comprender que entre dos números decimales siempre es posible incorporar otro decimal. **(Proceso)**	Si

	Comprende que una expresión decimal no tiene antecesor ni sucesor ya que siempre se puede encontrar un número después de un antecesor y antes de un sucesor. **(Objeto)**	
Uso de expresiones decimales en las Unidades Métricas de Longitud.	Descomponer las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de fracciones decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro. **(Proceso)** Convertir magnitudes métricas expresadas en forma de número decimal a fracción decimal. **(Proceso)** Convertir magnitudes métricas expresadas en forma de fracción decimal a número decimal. **(Proceso)** Expresar magnitudes métricas de lenguaje natural a fracción decimal. **(Proceso)** Expresar magnitudes métricas del lenguaje natural a número decimal. **(Proceso)**	No
Transformación de unidades métricas de longitud.	Expresar las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de números decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro. **(Proceso)** Descomponer las unidades métricas (múltiplos y submúltiplos) en forma de números decimales tomando como unidad de medida de referencia el metro. **(Proceso)** Convertir magnitudes métricas tomando como una unidad de referencia a otra unidad de medida. **(Proceso)** Reconocer magnitudes equivalentes que están expresadas en unidades diferentes. **(Proceso)** Comparar y ordenar medidas que están expresadas en unidades diferentes. **(Proceso)** Reconocer magnitudes equivalentes que están expresadas en unidades diferentes. **(Proceso)**	Si
Comprensión de la fracción como cociente.	Hallar una expresión decimal a partir de un número fraccionario mediante el algoritmo de la división. **(Proceso)**	Si
Transformación de cocientes a expresiones decimales. Reconocer cuando una fracción es decimal o no.	Realizar el proceso de conversión de fracción decimal a número decimal. **(Proceso)** Realizar la división del numerador entre el denominador. **(Proceso)**	Si
Comprensión de conversión de una fracción a expresión decimal finita.	Realizar el proceso de conversión de fracción decimal a número decimal. **(Proceso)** Convertir la fracción representante a una fracción decimal. **(Proceso)**	No
Comprensión de expresión decimal infinita periódica. Comprensión de expresión decimal periódica pura.	Obtener expresiones decimales infinitas periódicas a partir de una fracción. **(Proceso)** Reconocer si una expresión generada por una fracción es una expresión decimal pura o mixta. **(Proceso)**	Si
Fracción generatriz de los racionales representados	Encontrar el denominador de la fracción generatriz. **(Proceso)** Encontrar el numerador de la fracción generatriz. **(Proceso)**	Si

por expresiones periódicas puras.		
Fracción generatriz de los racionales representados por expresiones periódicas mixtas.	Encontrar el denominador de la fracción generatriz. **(Proceso)** Encontrar el numerador de la fracción generatriz. **(Proceso)**	Si
Comprensión de redondeo o aproximación de expresiones decimales de un número	Cuando el dígito siguiente es 0, 1, 2, 3, 4, se deja la cifra hasta la cual se desea truncar el número. (Acción) Cuando el dígito siguiente es 6, 7, 8, 9, se aumenta 1 a la cifra hasta la cual se desea truncar el número. (Acción) Cuando el número siguiente es 5, se mira la cifra que le precede y se realiza uno de los pasos anteriores según sea el caso. **(Proceso)**	Si
Irracionales. Comprensión de expresión decimal infinita no periódica. Número no decimal.	Un **número irracional** es un **número** que no se puede escribir en fracción, la parte decimal sigue para siempre sin repetir ningún periodo. Son números que no se obtienen a partir de los números fraccionarios, algunos de ellos surgen de otras operaciones como por ejemplo la radicación. **(Proceso)**	Si

Una vez que está determinad la ruta, se deben planear las actividades para el desarrollo de las enseñanzas ACE, y es aquí donde reinicia el ciclo de investigación.

Por lo tanto, llego a la conclusión de que el camino planteado desde la descomposición genética, si bien no es el único camino para configurar el esquema para la comprensión de los números decimales, es un camino válido ya que hubo 2 estudiantes que usaron esta ruta y pudieron tematizar el concepto. A continuación, se muestra en una gráfica la construcción del esquema de número decimal desde la descomposición genética.

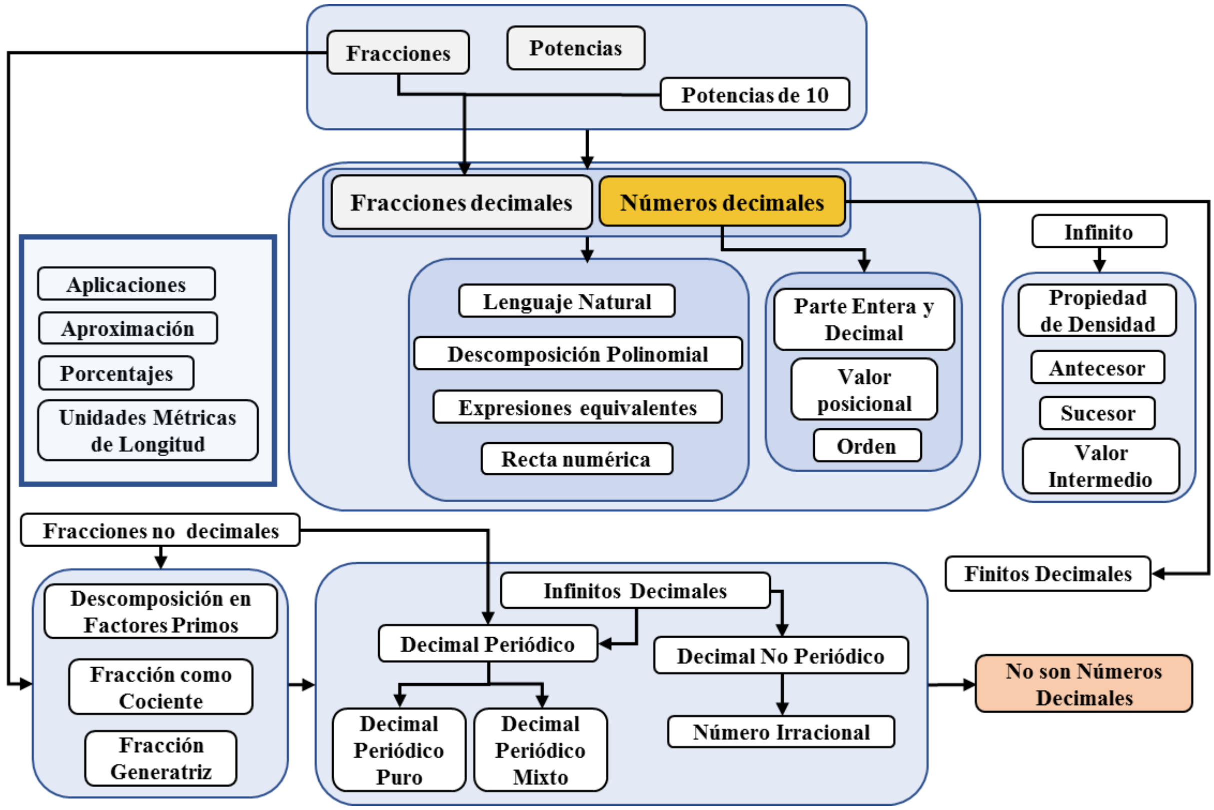


Figura 9: Esquema de número decimal. Elaboración propia.

De la comprensión que hicieron los estudiantes se pudo interpretar lo siguiente.

En los cuadros podemos observar conjuntos de elementos pertenecientes al concepto, los principales están en el cuadro central se encuentra el concepto de los números decimales junto con el de los números racionales, entre estos dos conceptos es que se comienza a hacer la construcción de la comprensión entregada en la secuencia didáctica, de ahí le siguen las diferentes representaciones apoyadas en la comprensión de las características del número decimal que aparecen a la derecha (Valor posicional, el orden, parte entera y parte decimal).

En la parte de abajo encontramos el tratamiento que se le da a las expresiones decimales con decimales infinitos que provienen de las fracciones no decimales. A lado izquierdo los elementos que hacen parte de las operaciones que se realizan sobre las fracciones para saber si son decimales o no, ya que si no son decimales se les realiza un tratamiento diferente para hacer transformaciones entre sus formas de representación, aquí se desarrollan procesos de reversión para la encapsulación de estos procesos. En el centro vemos como se discriminan las expresiones que provienen de fracciones no decimales, las cuales se escriben en forma de expresiones decimales con coma y tiene periodo en la parte decimal; si el número tiene infinitos decimales y no tiene periodo entonces es no pertenece al conjunto de los números decimales. De ahí se puede concluir que los números decimales son aquellos que tienen un número finito de cifras en la parte decimal, o que son simplemente producto de la transformación de una fracción decimal a una expresión escrita con la coma.

Al lado derecho de la parte central, vemos el concepto de densidad, el cual, como se vio en las entrevistas y en las secuencias didácticas, introduce a los estudiantes a la comprensión del infinito actual para diferenciarlo con el concepto de infinito potencial que pocas veces ha sido tratado por los estudiantes. Las diferentes formas de representación del número decimal sirven como base para comprender esta propiedad de los números decimales, los estudiantes se apoyan principalmente en la recta y en el número como vimos anteriormente.

Al lado izquierdo de la parte central vemos un cuadrado con las aplicaciones que se tomaron para completar la tematización del concepto de número decimal, en la cual el estudiante utiliza principalmente los conceptos de la parte central y las transformaciones entre ellos como herramienta.

En la parte superior observamos los saberes previos sobre los cuales se apoyó la secuencia didáctica, (Ver Anexo K en CD), fue sin lugar a dudas el principal acierto haber abordado estos temas antes de dar inicio al concepto de número decimal.

5.2. Caracterización de los estudiantes evaluados

Con los resultados obtenido en las caracterizaciones podemos observar patrones de respuesta similares en los estudiantes encuestados para determinar el nivel de comprensión en el que éstos se encuentran. se hizo el ejercicio de revisar las pruebas para tener una visión aproximada de los niveles de comprensión de los estudiantes que hicieron parte de la investigación ya que se encuentran patrones de respuesta muy similares en las pruebas realizadas que permiten determinar los niveles de comprensión.

Es complejo reconocer el nivel en el que se encuentra un estudiante al que se le ha realizado una entrevista, sin embargo, en la mayoría de los casos es fácil determinar el nivel de comprensión, sobre todo el de aquellos que pertenecen a los niveles Intra 1 e Intra 2, los cuales corresponden al 78% de la muestra. Solo algunos casos muestran resultados diferentes, sobre todo los que tienen que ver con el paso del nivel Intra 2 al Inter 1 y entre los niveles Inter. Al realizar las estimaciones de los niveles se encontraron las siguientes anomalías:

- El estudiante E13-6C se cataloga en el nivel Intra 2, ya que no logra hacer bien las transformaciones entre las diferentes representaciones del número decimal, no realiza comparaciones, comete errores con el valor numérico de las cifras y no reconoce cuando una fracción es decimal, sin embargo alcanza a construir el concepto de número irracional; a partir del algoritmo de la división, aplicado a las fracciones y a partir de la notación de expresiones decimales con coma, reconoce las diferencias entre número decimal, racional e irracional.

- El estudiante E11-6C es catalogado en el nivel de comprensión Inter 2 debido a que soluciona los problemas de las preguntas 25 a la 29, además ha construido la comprensión de número irracional, reconociendo la diferencia entre este número con el número decimal y el racional a partir de la expresión decimal con coma, sin embargo, no reconoce las fracciones decimales que no tienen potencias de 10 en el denominador, y a pesar de que conoce bien la manera de graficar los números decimales en la recta no asimiló el concepto de densidad.

- Otra anomalía es que hay estudiantes que resolvieron los problemas que hacen referencia a la equivalencia, pero cometieron el error en las preguntas que hacen alusión a las notaciones equivalentes de los números decimales agregando ceros.

- El estudiante E7-6B no logra establecer conexión entre las diferentes notaciones del número decimal, conoce el proceso para encontrar una fracción generatriz con errores, realiza el proceso inverso encontrando expresiones decimales a partir del algoritmo de la división, no conjetura de manera adecuada las lógicas para diferenciar el número decimal, racional e irracional, logra establecer cuales fracciones no son decimales y cuales sí teniendo en cuenta las que tienen a 2 y 5 como múltiplos del denominador. Lo que significa que el estudiante no solo aísla algunas acciones, sino que también aísla procesos, por lo tanto, no construye objetos y esquemas. Debido a esto no logra el nivel Inter y queda catalogado en el nivel Intra 2, este tipo de incongruencias suceden cuando las acciones son realizadas sin haber llegado a la comprensión de proceso, este comportamiento sugiere que el estudiante simplemente ha mecanizado algunos procesos sin tener comprensión de estos.

Revisando cada una de las evaluaciones, se interpretan los resultados a partir de las caracterizaciones de los niveles y la comparación de estos con los resultados que obtuvieron los estudiantes encuestados. Los resultados obtenidos después de analizar las pruebas se muestran la siguiente tabla:

Tabla 47
Número de estudiantes en cada nivel de comprensión

Estudiantes	Intra 1	Intra 2	Inter 1	Inter 2	trans
Prueba Piloto	**7**	**20**	**4**	**5**	**0**
Prueba Definitiva	**10**	**9**	**2**	**0**	**2**
Toda la muestra	**17**	**29**	**6**	**5**	**2**

Fuente: Resultados prueba piloto y prueba definitiva

A continuación, haremos el análisis estadístico de las pruebas realizadas para comparar incidencias y relaciones entre la prueba piloto y la prueba definitiva.

5.3. Análisis de los resultados de las pruebas

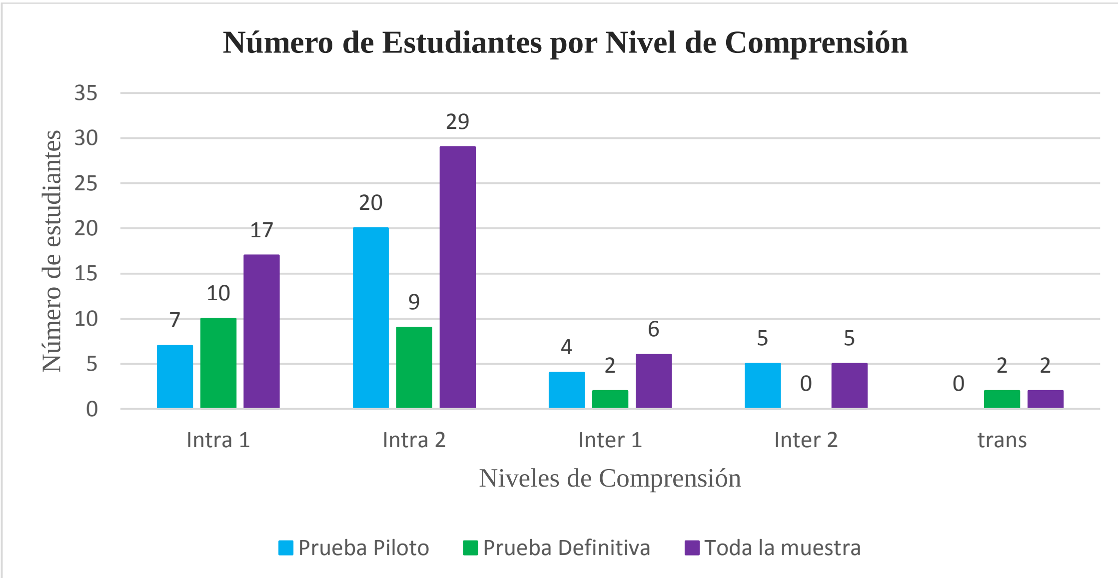


Figura 10: Número de estudiantes por nivel de comprensión. Tabla comparativa de los niveles de comprensión de la prueba piloto y el cuestionario definitivo.

Revisando los valores de la tabla podemos concluir lo siguiente:

1. El 78% de los estudiantes de la prueba presentan un nivel intra de comprensión. Discriminado por subniveles quedan distribuidos de la siguiente manera:

- El 29% de los estudiantes de la prueba presenta un nivel Intra 1 de comprensión.
- El 49% de los estudiantes de la prueba presenta un nivel Intra 2 de comprensión.

2. El 19% de los estudiantes de la prueba presentan un nivel inter discriminado por subniveles así:

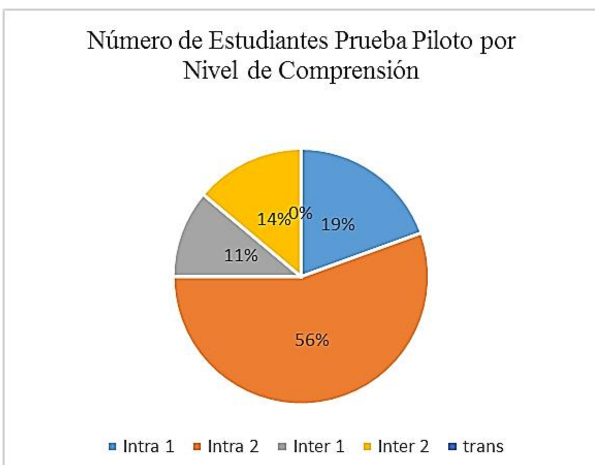
- El 10% de los estudiantes de la prueba presenta un nivel Inter 1 de comprensión.

- El 9% de los estudiantes de la prueba presenta un nivel Inter 2 de comprensión.

3. El 3% de los que presentaron la prueba llegó al nivel Trans de comprensión.

A continuación, en las ilustraciones 2 y 3 podemos observar las diferencias entre el cuestionario definitivo y la prueba piloto, el número de ítems disminuyó de 68 a 57 pero no insidió positivamente en los resultados de la prueba, ya que el porcentaje de estudiantes que estaban en los niveles Intra subió del 75% al 82% y el de los niveles Inter disminuyó del 9% al 25%.

Esta tendencia no demuestra tener relación con el hecho de que 2 de los estudiantes que presentaron el cuestionario definitivo tuvieran un nivel trans de comprensión del concepto de número decimal. Lo que significa que los procesos de validación fueron acertados y se logró un instrumento de medida definitivo que arroja resultados sobre los niveles de comprensión de manera independiente a las características de la población estudiada.



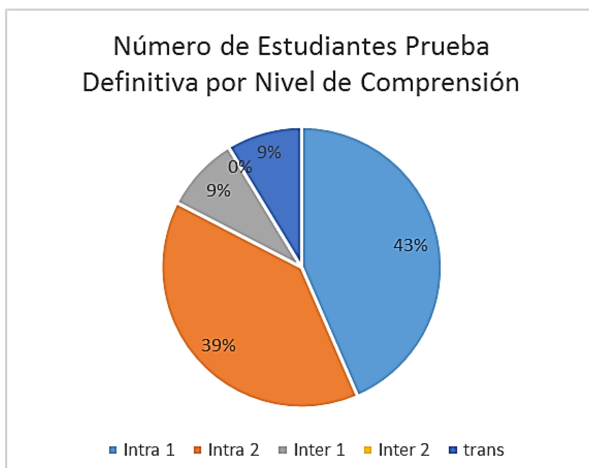


Figura 11: (Izquierda) Porcentaje de estudiantes según el nivel de comprensión de la prueba piloto.
Figura 12: (Derecha) Porcentaje de estudiantes según el nivel de comprensión de la prueba definitiva.

5.4. Implicaciones pedagógicas

En este tipo de investigaciones se debe enmarcar muy bien el nivel de enseñanza, ya que se puede caer en extremos, por un lado, plantear actividades que no generen interés en los estudiantes ya que no representan ningún reto, por otro lado, plantear actividades que los estudiantes no puedan comprender. De allí que hay que ser cuidadosos y mantener buenos criterios al momento de plantear las actividades. Abio (2005) resalta la importancia que tiene que los profesores conozcan la Teoría del Flujo de Csikszentmihalyi (1992), esta teoría propone que, si hay equilibrio entre el desafío que propone un reto y las habilidades que posee el individuo, se puede generar una experiencia óptima de aprendizaje.

Al realizar el ciclo de investigación con el propósito de medir los niveles de comprensión y como producto del presente trabajo de investigación, se gesta una propuesta muy completa para la enseñanza del concepto de número decimal, con actividades propuestas para cada uno de los elementos matemáticos que componen el concepto y herramientas didácticas aplicables a través de presentaciones en power point.

> *"…los objetos matemáticos sólo existen a través de las herramientas que se inventan para expresarlos y… las posibilidades de producción de conocimiento están condicionadas por la disponibilidad de dichas herramientas" (Sadovsky; Pág. 32).*

Por lo tanto, esta investigación también cumple con el propósito de ayudar a mejorar la calidad de vida de estos niños, para que encuentren en las matemáticas una herramienta que sirve para solucionar problemas y darle un mayor significado a fenómenos que ocurren en contextos reales.

A través de este estudio se desarrolló la descripción de los elementos que hacen parte de la comprensión del concepto de número decimal y sus construcciones mentales, por lo general éstas se abordan de manera desordenada y aislada en los procesos de enseñanza de los números decimales, es por eso que las propiedades no se enlazan unas con otras con la suficiente fuerza para ser encapsuladas en objetos. Esta investigación fue diseñada con ese propósito, de que todos los elementos que pertenecen al concepto de los números decimales estén juntos, que se configuraren acciones y procesos de manera sistemática que otorguen la facultad de construir objetos de conocimiento específicos y se puedan establecer diferencias entre los números decimales con otros conjuntos numéricos, en el orden que lo plantea Socas (2002), concibiendo a D como el conjunto numérico de los números decimales con características propias.

La comprensión del esquema planteado por Ed Dubinsky basado en Piaget, brinda herramientas metodológicas y mejora la capacidad intelectual para desarrollar para la construcción de un objeto específico de conocimiento. La Teoría APOE es una herramienta que sirve para explorar nuevos caminos de enseñanza de los objetos matemáticos. Realizar la descomposición genética de un concepto permite ir a sus bases más elementales y profundas; revisar su fenomenología en las operaciones de pensamiento que realiza el ser humano y profundizando en las didácticas de los elementos que componen los conceptos matemáticos, se favorece la comprensión propia e impulsa nuevas dinámicas de los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos objetos. La realización de este trabajo ofrece la oportunidad de aprender a plantear propuestas de enseñanza a través del análisis de la comprensión de los estudiantes y también ayuda a encontrar nuevas maneras de concebir la enseñanza y el aprendizaje de un concepto.

A través de esta investigación se pudieron establecer los conocimientos previos que deben desarrollar los estudiantes para lograr competencias básicas en la comprensión de los números decimales. Se comprobó que el estudiante puede lograr la tematización del concepto de número decimal si tiene bases sólidas en la comprensión de dos objetos matemáticos: la potenciación y la fracción reconocida como parte de un todo y como un operador.

5.5. Dificultades y Limitantes

El concepto de número decimal se construye por partes y evoluciona con el tiempo; para configurar el concepto de número decimal debe desmembrarse y debe pasar por diferentes niveles de dificultad desde la básica primaria hasta los niveles de educación superior. En el sistema educativo actual es cuestión de asar que ocurra un desarrollo de adecuado de este concepto, ya que este debe pasar de por todas las competencias de los currículos de las instituciones en la educación básica y media y por los criterios de los docentes; lo expuesto anteriormente muestra una debilidad de carácter curricular que debe corregirse desde las pruebas externas, los estándares y lineamientos, en los que se debe hacer más énfasis en la enseñanza de los números decimales, como fue mostrado en el anexo A del capítulo 1.

El tiempo dedicado para la enseñanza de los objetos matemáticos es un problema tanto para el aprendizaje como para la enseñanza, ya que los estudiantes no han terminado de asimilar una acción, proceso objeto o esquema y llega el momento de pasar al tema que sigue debido a que así lo exigen los estándares internacionales que miden el conocimiento, exigiendo cantidad de contenidos y niveles de profundización, con estas concepciones y requerimientos se estresa el ambiente educativo.

Los libros de texto que se usan para enseñar no contienen el orden genético para construir la comprensión de los números decimales, por lo que hacer un acto educativo que llene todos los vacíos conceptuales del concepto incluyendo la metodología didáctica, requiere de un proceso de formación y de investigación previo por parte del docente.

Una investigación de este tipo para el nivel de enseñanza en el que se encuentran los estudiantes requiere una buena disposición de tiempo para mejorar la comprensión de los conceptos, aunque algunos estudiantes demostraron tener la capacidad de hacerlo en el tiempo establecido para la investigación, además la evaluación se hace muy compleja cuando se pretende evaluar tanto contenido en una sola prueba, con la misma limitante se encontró Konic (2011), al validar una prueba para determinar los conocimientos de los decimales en un grupo de futuros profesores de matemáticas.

Existen algunos elementos que bien podrían ser convertidos en objetos tal como se mostró en la secuencia didáctica ACE, sin embargo, resulta imposible tomar todos los ejemplos y ejercicios necesarios para que se evidencie o se construyan objetos matemáticos para una sola prueba en el grado en el que se encuentran los estudiantes y a este nivel de asimilación. Una mejor forma de hacer una investigación que abarca una amplia gama de conceptos puede ser abordada de manera secuencial donde los conceptos sean evaluados y analizados por partes.

Esta teoría es susceptible de ser aplicada de manera inadecuada, una anomalía de este tipo se puede presentar ya que la comprensión de un objeto tiene muchos caminos posibles, el planteamiento de una ruta para la comprensión depende de las apreciaciones del investigador. Al realizar el análisis es muy difícil determinar en qué nivel de comprensión se encuentran algunos estudiantes puesto que en algunos casos ellos logran aplicar objetos sin tener claras las acciones ni los procesos sobre las leyes que rigen las construcciones mentales sobre el concepto. De ahí que el investigador debe ser tener experiencia y experticia con el manejo del concepto.

5.6. Aportes de la investigación al contexto donde fue realizada:

Al aplicar las acciones y procesos de la descomposición genética en las clases, se genera un ambiente de aprendizaje más propicio, más ordenado, más agradable para el proceso de enseñanza y aprendizaje, también se tiene la ventaja de que el estudiante busca nuevas alternativas, aprende a identificar sus propios errores para corregirlos y enrutar de nuevo los procesos. “…los niños dejan de ser curiosos por el miedo a cometer errores, y como consecuencia de eso, también dejan de ser creativos…”, Senge (2017).

La transmisión de los resultados obtenidos a través de esta experiencia de investigación puede ayudar a mejorar las prácticas educativas de los docentes de la Institución Educativa Héctor

Ángel Arcila, tanto en grados inferiores como en los superiores de manera que se pueda fortalecer el tratamiento y evolución del concepto en todos los niveles de formación.

La implementación de la Teoría APOE dentro de las prácticas de planeación puede ayudar a fortalecer el currículo y a reconocer el tratamiento de otros objetos matemáticos para incluirlos en el modelo pedagógico de la Institución Educativa.

Esta investigación ofrece un aporte significativo a los estudiantes que pasan por el grado sexto de la Institución Educativa ya que la secuencia didáctica queda como instrumento para la enseñanza de los futuros docentes que dicten el curso.

5.7. Análisis de las dificultades del contexto de enseñanza

A través de los resultados obtenidos podemos concluir que el nivel de asimilación de los estudiantes es bajo, dentro de los factores que pueden afectar los resultados de la prueba se destacan los siguientes:

Las características de la población. Según el reporte de la dependencia del Aula de Apoyo Pedagógico de la institución, 12 estudiantes presentan barreras para el aprendizaje y 7 casos presentan dificultades psicosociales, lo que corresponde a un 34% de la población. Sin duda son factores inciden de manera negativa en el rendimiento académico y hace que estos estudiantes presenten un nivel de comprensión bajo.

Durante la aplicación de la secuencia didáctica ACE el nivel de receptividad de los estudiantes fue muy bueno, y así lo demuestran los videos y las actividades que se realizaron, una característica que presenta la población es que olvidan con mucha facilidad, lo que significa que se deben generar estrategias para mejorar la aprehensión de los conceptos matemáticos. No todos los estudiantes lograron encapsular los conocimientos previos, la mayoría no tiene bien definido que es una fracción ni que es una potencia, y la gran dificultad se presenta con las operaciones básicas, algunos presentan errores y otros tienen esa barrera a la hora de realizar procesos de pensamiento numérico.

La educación básica primaria es atendida por docentes que no tienen formación en el área de matemáticas. Los estudiantes de primaria del sector rural reciben clases en 2 modalidades antes de ingresar a la educación básica; la primera es en la modalidad de aula multigradual en la que los estudiantes de 1° a 5° reciben formación de un solo docente en todas las áreas en todos los grados en una aula compartida a todos los estudiantes al mismo tiempo, esta es la modalidad de Escuela Nueva descrita en el Anexo A, y la otra modalidad es en aulas donde un docente dicta todas las materias en un solo grado. Cuando los estudiantes pasan a básica secundaria, comienzan a recibir clases de matemáticas con un docente, ya sea Ingeniero o Licenciado en Matemáticas quien dicta la asignatura.

La preparación de los docentes en el área de matemáticas en primaria no cumple con los requerimientos para la educación actual en matemáticas, si el docente no sabe lo que no sabe y simplemente cree que hace lo mejor que puede y que esa es la mejor manera de hacerlo, no podremos afrontar los retos de la educación actual en Colombia, ya que según Zubiría (2018) de cada 100 jóvenes de 15 años que han tenido 80 profesores solo el el 0,09% son capaces de hacer una lectura crítica. Senge (2017) profesor de la escuela de negocios del Massachusetts Institute of Technology, en un artículo publicado por el periódico español El País, establece una crítica hacia los colegios ya que en diferentes partes del mundo continúan replicando un modelo de aprendizaje pasivo y afirma que **"El profesor del siglo XXI tiene que enseñar lo que no sabe"** y también que **"Es un error ser tan rígidos con la edad porque los niños avanzan a distintas velocidades",** hecho que se comprueba en los resultados obtenidos según el número de estudiantes que lograron un nivel de comprensión inter y trans ya que solo 9 estudiantes, que corresponden al 22% de la muestra lograron avanzar del nivel intra de comprensión.

Frente a esto el pedagogo y analista del sistema educativo colombiano Julián de Zubiría, en una entrevista reciente, de enero de 2018 en las noticias del colombiano, plantea que al estudiante se le debe enseñar pensamiento crítico; en sus palabras: "… la información ya está, lo que necesitamos es que los jóvenes tengan las competencias que le permitan saber dónde está, que le permitan interpretar, que le permitan deducir, que le permitan argumentar, que le permitan encontrar incoherencias, entonces hay que cambiar el sistema educativo..." el problema sigue siendo el mismo y es que "… lo que uno necesita en la vida no se lo enseñan en la escuela…" por lo tanto hay que encontrar un equilibrio para que la enseñanza de la matemática no sea cuadriculada sin perder la esencia del rigor matemático, del pensamiento avanzado de un objeto matemático y su fenomenología, Puig (2001).

Sin duda hay factores que afectan este tipo de investigaciones que son muy difíciles de tratar y definir y más cuando son factores sociales, culturales, afectivos, entre otros. Bronfenbrenner

(1987) propone una pedagogía más humana en la que se deben tener en cuenta las necesidades del individuo y de la relación con su entorno ya que el propósito de la educación es la de mejorar su calidad de vida.

5.7. Implicaciones de futuro

En cuanto a las investigaciones, el campo de los números decimales es un campo todavía muy abierto, donde cabe destacar la necesidad de disminuir las dificultades que presentan los estudiantes no solo en los centros educativos de Educación Básica y Media sino también en las universidades, donde se presentan altos índices de deserción por esta asignatura. Es por este motivo que cobra valor estos trabajos de investigación que tratan de mostrar en qué consisten las dificultades y cómo abordar soluciones de la mejor manera. Konic (2011) realiza un estudio con estudiantes para profesores de matemáticas, y encuentra que éstos presentan dificultades para comprender y definir el número decimal. Los docentes universitarios son testigos de esa realidad, pero es en la escuela que se deben proyectar las acciones necesarias para abordar este tipo de problemáticas, es por estos motivos que se requiere una depuración de los objetos matemáticos desde la escuela.

Indagar en la comprensión de los números decimales ha cambiado la visión que tenía y el manejo que se le debe dar al concepto en grado sexto, y en los grados en los que este concepto se desarrolla, en las clases se realizan unas mejores aclaraciones cuando se utilizan estos números, lo que significa que ha madurado las propuestas metodológicas de las clases.

5.8. Interrogantes y preguntas para la enseñanza

- ¿Estamos dedicando el tiempo necesario a la investigación y planeación de los conceptos que enseñamos en nuestras instituciones educativas?
- ¿Estamos manejando bien los tiempos para la enseñanza de un concepto?, más específicamente, ¿para la enseñanza del número decimal?
- ¿Estamos manejando bien los tiempos y los relevos de un grado a otro para que el concepto de número decimal evolucione con los niveles de comprensión de los estudiantes a través de los niveles de educación cada año?
- ¿Estamos aplicando modelos pedagógicos, teorías del aprendizaje y marcos teóricos de investigación que permitan implementar estrategias que mejoren la calidad de la enseñanza de las matemáticas?

Referencias Bibliográficas

- Abad, Francisco J et al. (2004). Introducción a la Psicometría. Teoría Clásica de los Tests y Teoría de la Respuesta al Ítem. Universidad Autónoma de Madrid.
- Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis doctoral. Salamanca:Universidad de Salamanca España.
- Arnon, I., et al., APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education, DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6_1, ©Springer Science+Business Media.
- Artigue, Michèle (2004), "Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?", Educación Matemática, vol. 16, núm 3, pp. 5-28.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* II (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society.
- Ávila, Alicia. (2008). Los profesores y los decimales: Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación matemática*, *20*(2), 5-33. Recuperado en 16 de julio de 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php
- Ávila, A. y S. García (2008), Los números decimales: más que una escritura, México, inee (en prensa).
- Ávila, Alicia y Silvia García (2008), Los decimales: más que una escritura, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- B Qian (ed.), *Ten Mathematical Classics* (Chinese) (Beijing, 1963), **Artículo de:** *JJ O'Connor* y *EF Robertson,* recuperado de http://www.groups.dcs.stand.ac.uk/~history/Biographies/Xiahou_Yang.html
- Bell, A.W., Costello, J. y Küchermann, D.E.: 1983. A Review of Research in Mathematical Education: Part A. Research on Learning and Teaching. NFER-NELSON
- Bodí, S.D. (2006) Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el Conjunto de los Números Naturales. Tesis Doctoral. Universitat d` Alacant.

- Bradley, Micheael (2006). «John Napier (1550–1617): Coinventor of Logarithms». The age of genius: 1300-1800 (en inglés) (primera edición). Nueva York: Chelsea House. pp. 31-43
- Bronfenbrenner. (1987). Teoria Ecologica de Bronfenbrenner. Madrid España: Igualdad y calidad de vida.
- Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des mathématiques, 2.3, 37-127.
- Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 4.2, 164 – 197.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. La pensée Sauvage, Grenoble
- Carlos A. López Leiva. (2015). Enseñando operaciones con números decimales: Representaciones conflictivas. CIAEM, XIV, Chiapas México, pp 2, 3.
- Castejón Costa, J. L. (1997). Introducción a los métodos y técnicas de investigación y obtención de datos en psicología. Sant Vicent del Raspeig, España: ECU.
- Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria (págs. 315-345). Madrid: Síntesis.
- Centeno, J. (1988). Números decimales ¿Por qué?, ¿Para qué? Ed. Síntesis, España.
- Csikszentmihalyi, Mihaly (1990). Flow: The Psychology of Optimal Experience. New York: Harper-Row.
- D E Smith, *History of Mathematics* **II** (New York, 1925), 721.
- Dedekind, Richard. Continuidad y los números irracionales. Disponible en: www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf. Recuperado 24 Julio de 2012.
- Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav
- Dörfler, W.:1987. ‘Empirical Investigation of the Construction of Cognitive Schemata from Actions’, en *Proceedings of the XI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Volumen III, 3-9.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.). Advanced in Mathematical Thinking (pp.25–41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. Proceedings of the four teenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2, 27 – 33.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education. In D. Holton (Ed.), The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study (pp. 273–280). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Dubinsky, E.: 1990. Teaching Mathematical Induction II, The Journal of Mathematical Behavior
- Dubinsky, E.: 1991a. 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking' in D. Tall (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 95-123.
- Dubinsky, E.: 1991b. 'Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics', en L.P. Steffe (editor) *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. Springer-Verlag, 160-202.
- Dubinsky, E.: 1996. 'Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria'. *Educación Matemática*, Vol 8-No3, pp24-41
- E. Dubinsky and P. Lewin. Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness, Journal of Mathematical Behavior, 5, 55-92, 1986.
- Font, V., (2013). Coordinación de Teorías en Educación Matemática. Memorias VII CIBEM; Montevideo, Uruguay.
- Freudenthal, H. (1994). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. México: CINVESTAV-IPN(p. 42).
- Gamboa Inostroza, Mauricio . (2013). Tesis Magister. En Construcción Cognitiva De La Raíz Cuadrada (40). Valparaíso: CONICYT-Chile. Dirigido por: Dra. Parraguez González, Marcela.
- García, J. A. (1998). El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal. Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

- Glasersfeld, Ernst von, & Steffe, L.P. (1991) Conceptual models in educational research and practice, J. of Educational Thought, 25(2), 91–103.
- Godino, J. D. (Director) (2004). Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-933517-2-5. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2003). Medida y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- Gómez Alfonso, Bernardo. Concepciones de los números decimales. Revista de Investigación en Educación, nº 8, 2010, pp. 97-107
- Hans Freudenthal (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. 1. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.
- J Suzuki, Mathematics in Historical Context (Mathematical Association of America, 2009).
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1983). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), Recent research on number learning (pp. 125-149). Columbus, OH: Eric/Smeac.
- Kieren, T., 1980. Recent Research on Number Learning. Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, Ohio.
- Konic (2005). Significados institucionales del número π: Implicaciones didácticas. Tesis de Máster. Universidad de Río Cuarto, Argentina.
- Kú, Darly; Roa, Solange (2010). La asimilación del conocimiento matemático como una actividad del sujeto. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 767-773). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Lawshe, C. H. (1975). A quantitative approach to content validity. Personnel Psychology, 28, 563-575.

- Lecturas Matemáticas Volumen 25 (2004), p´aginas 159–190 (Recibido en noviembre de 2004. Aceptado para publicación en diciembre de 2004) Eugenio M. Fedriani Angel F. Tenorio ´ Departamento de Econom´ıa y Empresa Universidad Pablo de Olavide Ctra. Utrera km. 1. 41013—Sevilla (Espana)
- Llinares, S. & Sánchez, V. (1996). Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria. En Giménez, LLinares & Sánchez (Ed.). El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. pp. 96-118.
- Llinares, S. (1996), "Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria", en J. Jiménez, S. Llinares y V. Sánchez (eds.), El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática, Granada, Comares, pp. 13-36.
- López Arias, Juan Felipe. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.
- M Cantor, Rudolff: Christoff R, in *Allgemeine Deutsche Biographie* **29** (Duncker & Humblot, Leipzig, 1889), 571-572.
- Martínez Arias, M. R. (1995). Psicometría. Teoría de los tests psicológicos y educativos. Madrid, España: Síntesis.
- Martínez Sierra, Gustavo. (julio, 2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. Relime, vol. 8, núm. 2, 205.
- Morales Díaz, Raúl Octavio. 2014. Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.
- Moreno Martel, María Dolores. 2013. El Sistema Numérico D en la Formación del Maestro. Estudio de un Programa de Formación. (TESIS DOCTORAL). Las Palmas de Gran Canaria. España.
- MUNTANER J. Consecuencias didácticas de la Teoría de J. Piaget. Enseñanza & Teaching: Revista Interuniversitaria de Didáctica [Internet]. 18 Nov 2009 [citado 22 Jul 2018]; 6(0): . Disponible en: http://revistas.usal.es/index.php/0212-5374/article/view/3442

- Mtros. Ignacio Caggiani, Natalia Pastrana, Cecilia de la Peña y Javier Alliaume Molfino 1 Temario de “didáctica”. Maestros de educación común. Año 2009-2010, memorando 11/09, del 29 de enero de 2009, CEP–ANEP.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*. Reston: Va: NCTM.
- Needham, Joseph, January 1959, Science and Civilisation in China, Volume 3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth, Cambridge University Press (pp 45,46)
- Néstor Mario Castaño Arbeláez, 2014. Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.
- Neyret, Robert (1995), Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maitres, Tesis de doctorado, Universidad Joseph Fourier-Grenoble 1.
- Obando, G. (1999). Enseñanza de los números racionales. En: tesis de maestría.
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte todo. Revista EMA. Vol. 8. No. 2.
- Piaget, J. (1980). Psicología y pedagogía. Buenos Aires: Ariel.
- Piaget, J., & García, R. (1983). Psicogénesis e historia de la ciencia. Madrid: Siglo ventiuno editores.
- **Piaget**, Jean; **Beth**, E. W. Epistemología matemática y psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real. by Evert W **Beth**; Jean **Piaget**. Print book. Spanish. **1980**. 2a ed
- Piaget, J. (1963) Las Estructuras Matemáticas y las Estructuras Operatorias de la Inteligencia. La Enseñanza de las Matemáticas. Madrid: Editorial Aguilar
- Publicado en Grouws DA (ed.) Manual de investigación sobre Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, Nueva York, 495-511.
- Puig, L. (2001) Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. México:
- R Rashed, Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes (Paris, 1984).

- R Rashed, L'extraction de la racine n-ième et l'invention des fractions décimales (XIe--XIIe siècles), Arch. History Exact Sci. 18 (3) (1977/78), 191-243
- R Rashed, The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra (London, 1994).
- Revista SUMA 40, junio 2002, pp. 129-132, ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA
- Rico, Luis (1996). Pensamiento numérico. En Hitt, F. (Ed.), Investigaciones en educación matemática. XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (pp. 27-54). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. PNA, 4(1), 1-14.
- Ruiz Cruz, César Augusto. 2013. La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- **Sadovsky, P.** (2005): Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.
- Saiz, Irma Elena; Gorostegui, Edith; Vilotta, Diego. Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. Educación Matemática, vol. 23, núm. 1, agosto-abril, 2011, pp. 123-151. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México.
- Salgado, H. (2007), Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa (no publicada), CICATA, México.
- Sánchez Acero, Francisco Alejandro, 2012. Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica. Universidad Nacional de Colombia (Tesis de Maestría). Bogotá, Colombia. (pp. 32-38)
- Senge (2017), El profesor del siglo XXI tiene que enseñar lo que no sabe. El País. Recuperado de https://elpais.com/economia/2017/01/15/actualidad/1484514194_176496.html

- Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III, 297-318.
- Socas, M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 50, 19-34F.
- Socas, Martín (2011). *La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, pp. 5-34
- Sönmez Veysel, Deuhyo Ed 2009, 2 (3), 110-114 Dokuz Eylül Üniversitesi Hemşirelik Yüksekokulu Elektronik Dergisi
- Trigueros M. y Oktaç, A. (2005). La Thèorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 10, 157-176.
- Trigueros, María. 2005. La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. Educación Matemática, EDUCACIÓN MATEMÁTICA, vol. 17, núm. 1, abril de 2005, Federal, México Distrito, pp. 5-31
- Vargas Hernández, Jeannette; González Astudillo, María Teresa; Llinares Císcar, Salvador. 2011. Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.
- Wentworth, J & Smith, D. E. (1985). Elementos de álgebra. México: Editorial Porrúa. Tomado de Martínez Sierra, Gustavo. (julio, 2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. Relime, vol. 8, núm. 2, 205.
- Youschkevitch (1976): Les mathématiques arabes (VIII-XV siè-cles), Librairie philosophique J. Vrin, Paris
- Zazkis, R y Campbell, S.: 1996. 'Divisibility and Multiplicative Structure of Nutural Numbers: Preservice Teachers' Understanding', Journal for Resarch in Mathematics Education, 27, 540-563.
- Rodríguez Jara, Miguel Alejandro. Construcción de los espacios vectoriales R2 y R3 desde la teoría Apoe. Instituto de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Pontificia

Universidad Católica de Valparaíso. Tesis de Doctorado PUCV. (2014). https://es.slideshare.net/PROMEIPN/presentacion-rodrguez-a-pucv.

Web grafía

- http://almerja.net/reading.php?i=5&ida=1370&id=707&idm=21894
- http://didacticoliliana.blogspot.com.co/2010/10/abstraccion.html
- http://historiadelprecalculo.com/cultura/china/
- http://mathematics0.blogspot.com.co/2013/03/top-10-ancient-arabic-scientists.html
- http://www.biyografya.com/biyografi/15084
- https://carc1975.files.wordpress.com/2011/11/sobre-el-origen-de-los-nc3bameros-decimales.pdf
- https://es.scribd.com/read/271521881/Mathematics-Its-Content-Methods-and-Meaning